

UNIVERSITÉ PARIS SUD

Faculté des Sciences d'Orsay

Département de Mathématiques

M1 Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Projet TER

présenté par

Marco D'ADDEZIO

Juanyong WANG

Le groupe de Galois absolu du corps $\mathbb{C}(Z)$

dirigé par

Jean-Benoît BOST



M1 Mathématiques Fondamentales et Appliquées
Département d'Enseignement de Mathématiques, Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91405 Orsay CEDEX

Table des matières

1	Groupes profinis	3
1.1	Premières définitions	3
1.2	Complétion profinie	4
2	Rappels sur la théorie de Galois infinie	6
3	Relations entre surfaces de Riemann et théorie des corps	8
3.1	Deux équivalences de catégories	8
3.2	L'action de monodromie sur les extensions de corps	9
3.3	Le groupe de Galois de $\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B)$	10
4	Groupe de Galois absolu de $\mathcal{M}(B)$	12
4.1	Groupe fondamental relatif à un germe de chemin	12
4.2	Lien fonctoriel avec les groupes de Galois	14
4.3	Fonctorialité par rapport aux Δ	15
4.4	Identification du groupe de Galois absolu de $\mathcal{M}(B)$	17
5	Calcul du groupe de Galois absolu de $\mathbb{C}(Z)$	23

Introduction

Le groupe de Galois absolu d'un corps k est le groupe de Galois de la clôture séparable sur k . Le calcul de ce groupe est en général un problème intéressant parce qu'il donne des informations sur toutes les extensions galoisiennes de k . Par exemple l'étude du groupe de Galois absolu du corps $\mathbb{Q}$ est un problème central de la théorie des nombres.

Dans cet exposé on va calculer le groupe de Galois absolu du corps $\mathbb{C}(Z)$. Pour faire cela on utilise le fait que pour toute surface de Riemann compacte connexe non vide B on a une équivalence entre la catégorie des algèbres étales sur $\mathcal{M}(B)$ et la catégorie des revêtements ramifiés analytiques finis sur B , où $\mathcal{M}(B)$ désigne le corps des fonctions méromorphes globales de B . Aux revêtements ramifiés analytiques finis qui sont galoisiens en dehors des points de ramification correspondent des extensions de corps de fonctions méromorphes galoisiennes. Encore mieux, si on considère le groupe fondamental de la base à laquelle on a enlevé les points de ramification, ce groupe agit par monodromie sur la fibre. Donc tout lacet induit un automorphisme de revêtements finis et donc un automorphisme de l'extension de corps associée¹.

On peut associer à toute algèbre étale l'ensemble des points de ramification de n'importe quel revêtement ramifié analytique fini qui est envoyé vers l'algèbre avec le foncteur $\mathcal{M}$. On fixe Ω une clôture algébrique de $\mathcal{M}(B)$ et un ensemble fini Δ de B et on prend l'extension composée de toutes les extensions dans Ω , avec ramifications dans Δ . On note cette extension $\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B)$. On verra que cette extension est galoisienne et que le groupe de Galois est le complété profini du groupe fondamental de $B - \Delta$.

Dans la section 4 on va introduire la définition de *groupe fondamental relatif à un germe de chemin* et on va montrer l'isomorphisme entre un certain limite projective de ses groupes avec le groupe de Galois absolu de $\mathcal{M}(B)$.

Le corps $\mathbb{C}(Z)$ est isomorphe à le corps des fonctions méromorphes sur la *sphère de Riemann*. Ainsi, grâce au résultat obtenu, on pourra calculer dans la section 5 le groupe de Galois absolu de $\mathbb{C}(Z)$. En particulier on obtient la solution du problème inverse de Galois sur le corps $\mathbb{C}(Z)$.

1. Ici on utilise le fait qu'un automorphisme de revêtements induit un et un seul automorphisme du revêtement ramifié analytique fini sur B associé.

1 Groupes profinis

Dans la première sous-section on va donner des rappelles des définitions et des résultats sur les limites inductives et projective, sur les espaces profinis et sur les groupes profinis.

Dans la deuxième sous-section on va parler du complété profini et du groupe profini libre construit sur un ensemble.

1.1 Premières définitions

Définition 1.1. On dit qu'un ensemble partialement ordonné $(I, \leq)$ est *filtrant* si pour tous $i, j \in I$ il existe $k \in I$ tel que $i \leq k$ et $j \leq k$. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $(I, \leq)$ un ensemble filtrant, on appelle *système projectif* dans $\mathcal{C}$ indexé par $(I, \leq)$ la donnée d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et pour tout couple $(i, j) \in I^2$ tel que $i \leq j$ d'un morphisme $f_i^j: X_j \rightarrow X_i$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) pour tout $i \in I$, $f_i^i = id_{X_i}$;
- (ii) pour tout $i, j, k \in I$ tels que $i \leq j \leq k$, on a $f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$.

On va noter le système projectif $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$ ou bien $(X_i)_{i \in I}$.

Définition 1.2. Si $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$ est un système projectif alors on appelle la *limite projective* de $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$ une limite $(X, (p_i)_{i \in I})$ du diagramme $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$. On indique la limite avec $\varprojlim_{i \in I} X_i$ ou $\varprojlim X_i$ quand il n'y a pas des ambiguïtés. On va appeler plusieurs fois X lui même la limite de $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$.

Définition 1.3. On appelle *système inductif* de $\mathcal{C}$ un système projectif dans la catégorie $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ et on appelle la *limite inductive* du système inductif la colimite du diagramme dans la catégorie $\mathcal{C}$. Donc si $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$ est un système inductif sur $(I, \leq)$, avec $f_i^j: X_i \rightarrow X_j$, on indique $\varinjlim_{i \in I} X_i$ ou $\varinjlim X_i$ la limite inductive.

Si $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$ est un système projectif dans $\mathcal{E}_{\text{ns}}$ indexé par $(I, \leq)$ une limite projective est l'ensemble

$$\left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid \forall (i, j) \in I^2 \text{ t.q. } i \leq j, f_i^j(x_j) = x_i \right\}$$

avec les projections induites par celles du produit. On peut démontrer le lemme suivant.

Proposition 1.4. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $(I, \leq)$ un ensemble ordonné filtrant et $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$ un système projectif sur $(I, \leq)$ alors une limite de $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$ représente le foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{E}_{\text{ns}}$ qui à un objet T associe $\varprojlim \text{Hom}(T, X_i)$.

Proposition 1.5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soient $\left((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j}\right)$, $\left((Y_i)_{i \in I}, (g_i^j)_{i \leq j}\right)$ deux systèmes projectifs indexés sur le même ensemble filtrant $(I, \leq)$, admettants une limite projective. Soient $(X, (f_i)_{i \in I}) = \varprojlim_{i \in I} X_i$ et $(Y, (g_i)_{i \in I}) = \varprojlim_{i \in I} Y_i$. Supposons d'avoir un ensemble de morphismes $(h_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{C}$ tels que $h_i: X_i \rightarrow Y_i$ et tels que pour tout $i \leq j$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{h_j} & Y_j \\ f_i^j \downarrow & & \downarrow g_i^j \\ X_i & \xrightarrow{h_i} & Y_i \end{array}$$

soit commutatif. Alors il existe un unique morphisme $h: X \rightarrow Y$ telle que pour tout $i \in I$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{h} & Y \\
f_i \downarrow & & \downarrow g_i \\
X_i & \xrightarrow{h_i} & Y_i
\end{array}$$

soit commutatif. En particulier, si tous les h_i sont des isomorphismes alors h est un isomorphisme.

Remarque. De même façon, on peut en général relever un diagramme commutatif à la limite.

Proposition 1.6. Soit $\mathcal{A}$ un certain univers et soient $\mathcal{G}_r$, $\mathcal{C}_o$ et $\mathcal{G}_r\mathcal{C}_o$ les catégories des groupes, espaces topologiques et groupes topologiques définies sur $\mathcal{A}$. Alors tout système projectif indexé par un ensemble appartenant à $\mathcal{A}$, admet une limite projective. Les limites projectives dans ces catégories commutent avec les foncteurs d'oubli respectifs vers $\mathcal{E}_{ns}$. Les limites projectives de $\mathcal{G}_r\mathcal{C}_o$ commutent aussi avec le foncteur d'oubli vers $\mathcal{G}_r$ et vers $\mathcal{C}_o$.

Proposition 1.7. Dans $\mathcal{C}_o$, une limite projective d'espaces compacts non vides est un espace compact non vide. En particulier dans $\mathcal{E}_{ns}$ une limite projective d'espaces compacts non vides est un espace compact non vide.

Définition 1.8. Soit X un espace topologique, on dit que X est *totalelement discontinu* si pour tout $x, y \in X$ distincts il existe un ouvert fermé U de X tel que $x \in U$ et $y \notin U$.

Définition-Proposition 1.9. Soit X un espace topologique, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est compact et totalelement discontinu ;
- (ii) X est homéomorphe à la limite projective d'un système projectif d'ensembles finis discrets dans la catégorie des espaces topologiques.

Si ces conditions sont vérifiées on dit que X est un *espace profini*.

Définition-Proposition 1.10. Soit G un groupe topologique, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'espace topologique sous-jacent à G est profini ;
- (ii) G est limite projective de groupes finis discrets dans la catégorie des groupes topologiques.

Si ces conditions sont vérifiées on dit que G est un *groupe profini*. On appelle $\mathcal{G}_r\mathcal{P}_{of}$ la catégorie des groupes profinis avec morphismes les morphismes de groupes topologiques.

1.2 Complétion profinie

Maintenant si on dispose d'un groupe G on peut fabriquer un groupe profini de façon canonique. Soit $(\mathcal{N}, \supseteq)$ l'ensemble filtrant des sous-groupes distingués d'indice fini de G . La famille $(G/N)_{N \in \mathcal{N}}$ avec les projections canoniques est un système projectif indexé par $\mathcal{N}$. Soit

$$\hat{G} := \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N.$$

On appelle $\hat{G}$ le *complété profini* de G . On indique η_G le morphisme canonique de G vers $\hat{G}$. Alors G est la solution du problème universel suivant :

Proposition 1.11. Pour tout groupe profini H et pour tout morphisme de groupes f de G vers H il existe un unique $\tilde{f}$ morphisme de $\hat{G}$ vers H de groupes topologiques qui rend le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
\hat{G} & \xrightarrow{\tilde{f}} & H \\
\eta_G \uparrow & \nearrow f & \\
G & &
\end{array}$$

commutatif.

En particulier si G et H et $f: G \rightarrow H$ un certain morphisme de groupes, alors on peut construire grâce au lemme 1.4 un et un seul morphisme de groupes de G vers $\hat{H}$ qui commute avec l'inclusion de H dans $\hat{H}$. Par la propriété universelle du complété profini on peut alors construire un unique $\hat{f}: \hat{G} \rightarrow \hat{H}$ morphisme de groupes topologiques tel que

$$\begin{array}{ccc} \hat{G} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{H} \\ \eta_G \uparrow & & \uparrow \eta_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

soit commutatif.

Soit J un ensemble fini, notons $L(J)$ le groupe libre construit sur J et $(X_i)_{i \in J}$ l'ensemble des générateurs canoniques. Notons $\hat{L}(J)$ le complété profini de $L(J)$. Si $J \subseteq J'$, on définit $\rho_J^{J'}: L(J') \rightarrow L(J)$ par

$$\rho_J^{J'}(X_i) = \begin{cases} X_i & \text{si } i \in J \\ e & \text{si } i \notin J. \end{cases}$$

Par passage aux complétés profini on obtient $\hat{\rho}_J^{J'}: \hat{L}(J') \rightarrow \hat{L}(J)$. Si I est un ensemble quelconque soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des parties finies, alors $(\mathcal{J}, \subseteq)$ est un ensemble filtrant et $\left((\hat{L}(J))_{J \in \mathcal{J}}, (\hat{\rho}_J^{J'})_{J \subseteq J'} \right)$ est un système projectif, soit

$$\hat{L}(I) := \varprojlim_{J \in \mathcal{J}} \hat{L}(J).$$

Définition 1.12. On appelle $\hat{L}(I)$ le *groupe profini libre* construit sur I .

2 Rappels sur la théorie de Galois infinie

On commence avec des définitions classiques.

Définition 2.1. On dit qu'une extension L/K est *finie* si la dimension de L comme K -espace vectoriel est finie. On dit que L/K est une *extension algébrique* si tout $\alpha \in L$ est la racine d'un polynôme non nul à coefficients dans K . On appelle *polynôme minimal* de α le polynôme irréductible, unitaire à coefficients dans K qui annule α . On dit que K est algébriquement clos si il n'a pas d'extensions non triviales. On dit que Ω est une clôture algébrique de K si Ω est algébriquement clos et Ω/K est algébrique. Si on a L_1/K et L_2/K deux extensions de K on dit que un (iso)morphisme de corps de L_1 vers L_2 est un K -(iso)morphisme si il est l'identité sur K et on indique $\text{Hom}_K(L_1, L_2)$ l'ensemble des K -morphisms de L_1 vers L_2 . Si $L_1 = L_2$ on dit qu'un K -isomorphisme est un K -automorphisme et on indique $\text{Aut}_K(L_1)$ le groupe des K -automorphismes.

Un théorème centrale de la théorie des corps, c'est le suivant :

Théorème 2.2 (Steinitz). *Soit K un corps, alors il admet une clôture algébrique. En plus deux clôtures algébriques de K sont isomorphes par un K -isomorphisme.*

Définition 2.3. Soit L/K une extension algébrique, on dit que c'est une *extension séparable* si pour tout $\alpha \in L$ le polynôme minimal de α sur K admet α comme racine simple. Soit Ω une clôture algébrique de L , on dit que L/K est *normale* si pour tout $\sigma \in \text{Hom}_K(L, \Omega)$, $\sigma(L) \subseteq L$. On dit qu'une extension algébrique est *galoisienne* si elle est soit séparable soit normale. Si L/K est galoisienne on note $\text{Gal}(L/K)$ le groupe $\text{Aut}_K(L)$ et on appelle ce groupe le *groupe de Galois* de L/K .

Soit L/K une extension de corps et soit $(E_i/K)_{i \in I}$ une famille de sous-extensions de L/K . Alors on appelle la *composée* de $(E_i/K)_{i \in I}$ la plus petite sous-extension de L/K qui a toute E_i/K comme sous-extension.

Remarque. La composée d'une famille de sous-extensions algébriques, séparables, normales, galoisiennes est algébrique, séparable, normale, galoisienne respectivement.

Soit $\mathcal{G}(L/K)$ l'ensemble des extensions galoisiennes finies de K contenues dans L . Si on donne à $\mathcal{G}(L/K)$ l'ordre induit par l'inclusion il dévient un ensemble filtrant parce que l'extension composée de deux sous-extensions galoisiennes finies est encore galoisienne et finie. Si $E, F \in \mathcal{G}(L/K)$ tels que $E \subseteq F$, un K -automorphisme de F induit par restriction un K -automorphisme de E , donc on a un morphisme de groupes

$$\rho_E^F : \text{Gal}(F/K) \rightarrow \text{Gal}(E/K).$$

Théorème 2.4. *Soit L/K une extension galoisienne, alors*

$$\text{Gal}(L/K) \simeq \varprojlim_{E \in \mathcal{G}(L/K)} \text{Gal}(E/K)$$

comme groupes. L'isomorphisme est induit par la restriction d'un K -automorphisme de L à un K -automorphisme de E pour tout $E \in \mathcal{G}(L/K)$.

Si on munit les groupes $\text{Gal}(E/K)$ de la topologie discrète, les morphismes ρ_E^F sont continues, donc on peut considérer la limite G du système projectif dans la catégorie des groupes topologiques. Le foncteur d'oubli de $\mathcal{G}_\tau \mathcal{C}_\tau$ vers $\mathcal{G}_\tau$ commute avec les limites projectives, donc l'isomorphisme dans le théorème 2.4 devient un isomorphisme de groupes entre $\text{Gal}(L/K)$ et G . On peut munir $\text{Gal}(L/K)$ d'une topologie induite par l'isomorphisme de groupes avec G . On a donc donné à $\text{Gal}(L/K)$ la structure de groupe profini.

Cette topologie donne une façon de généraliser la correspondance de Galois pour extensions finies à n'importe quel extension.

Théorème 2.5 (Krull). *Soit L/K une extension galoisienne, alors les applications*

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Corps intermédiaires de } L/K \} & \xleftrightarrow{\quad} & \{ \text{Sous-groupes fermés de } \text{Gal}(L/K) \} \\ E & \mapsto & \text{Gal}(L/E) \\ L^H & \longleftarrow & H \end{array}$$

sont une l'inverse de l'autre et induisent une bijection qui reverse les inclusions. Dans cette correspondance :

- Les sous-extensions finies de L/K correspondent à les sous-groupes ouverts de $\text{Gal}(L/K)$.
- Les sous-extensions galoisiennes de L/K correspondent à les sous-groupes distingués fermés de $\text{Gal}(L/K)$.

Si H est un sous-groupe distingué fermé de $\text{Gal}(L/K)$ le morphisme de restriction vers $\text{Gal}(L^H/K)$ induit un isomorphisme de groupes topologiques $\text{Gal}(L/K)/H \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(L^H/K)$.

Remarque. C'est essentiel prendre une topologie sur $\text{Gal}(L/K)$ parce que ce n'est pas vrai que tout sous-groupe de $\text{Gal}(L/K)$ sont fermés. Si $\mathbb{F}_p$ est un corps avec p éléments et $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$, le sous-groupe H engendré par l'automorphisme de Frobenius est dense dans $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ mais n'est pas le groupe tout entier, donc dans ce cas H n'est pas fermé et $H \neq \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p, \bar{\mathbb{F}}_p^H) = \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p, \mathbb{F}_p)$.

Définition-Proposition 2.6. Soit K un corps et Ω une clôture algébrique. On appelle *clôture séparable* de K une extension Ω^{sep}/K qui soit la composée de toutes les sous-extensions séparables de Ω/K . L'extension Ω^{sep}/K est galoisienne. On appelle *groupe de Galois absolu* de K le groupe de Galois $\text{Gal}(\Omega^{\text{sep}}/K)$. Ce groupe ne dépend pas du choix de Ω .

3 Relations entre surfaces de Riemann et théorie des corps

3.1 Deux équivalences de catégories

Définition 3.1. Soient B et X deux espaces topologiques et π une fonction continue de X vers B , alors on dit que (X, π) est un B -espace et aussi que X est un B -espace quand il n'y a pas des ambiguïtés. On appelle π la *projection* du B -espace. On note *morphisme de B -ensembles* une fonction continue entre B -espaces qui commute avec les projections. Les B -ensembles muni des morphismes de B -ensembles forment une catégorie. On note $\text{Aut}_B(X)$ le groupe des automorphismes de X dans la catégorie des B -ensembles. Si B' est un sous-espace de B on note $(X|_{B'}, \pi|_{B'})$ le B' -espace tel que $X|_{B'} := \pi^{-1}(B')$ et $\pi|_{B'} := \pi|_{\pi^{-1}(B')}$. Si $b \in B$ on note $X(b)$ la fibre de l'application $\pi|_B$ par rapport au point b . Si (X_1, π_1) et (X_2, π_2) sont deux B -espaces on note $X_1 \times_B X_2$ le produit fibré des deux espaces.

Donc un revêtement (topologique) de B est en particulier un B -espace. On va maintenant introduire certains B -espaces avec B une surface de Riemann. On commence d'abord avec la définition de surface de Riemann.

Définition 3.2. On appelle *surface de Riemann* une variété complexe de dimension 1. En particulier on suppose qu'elle est séparée et à base dénombrable.

Remarque. L'ensemble vide muni de la classe d'équivalence d'atlas constituée par l'atlas vide est en particulier une surface de Riemann. Un théorème de Radó dit qu'une surface de Riemann connexe a toujours une base dénombrable, même si on le suppose pas.

Définition 3.3. Soient X et B deux surfaces de Riemann et $\pi: X \rightarrow B$ une application propre qui n'est pas constante sur aucune composante connexe de X . On dit que (X, π) est un *revêtement ramifié analytique fini*.

D'ici on va toujours supposer que B soit une surface de Riemann connexe, compacte non vide.

Soit Δ une partie finie de B , alors si on a un revêtement topologique (X, π) sur $B - \Delta$, avec X une surface réelle. On peut donner à X une et une seule structure complexe qui rende π une fonction analytique entre surfaces de Riemann. En plus, en recollant un nombre fini de disques à X on peut obtenir un et un seul revêtement ramifié analytique fini $(\hat{X}, \hat{\pi})$ de B avec $\hat{\pi}|_X = \pi$. On peut montrer encore mieux :

Théorème 3.4. Soit B une surface de Riemann connexe et compacte et Δ une partie finie de B . Soient $\mathcal{V}_{B, \Delta}$ la catégorie des revêtements ramifiés analytiques finis de B dont l'ensemble des ramifications est contenu dans Δ et $\mathcal{R}_{B-\Delta}$ la catégorie des revêtements topologiques finis de $B - \Delta$. Soit $\rho: \mathcal{V}_{B, \Delta} \rightarrow \mathcal{R}_{B-\Delta}$ le foncteur qui à un revêtement ramifié analytique fini associe le revêtement non-ramifié fini sur $B - \Delta$ obtenu par restriction et en oubliant la structure complexe. Alors ρ est une équivalence de catégories.

Une autre équivalence (ou bien une anti-équivalence) c'est celle entre les revêtements ramifiés analytiques finis de B et les algèbres étales sur le corps des fonctions méromorphes sur B .

Définition 3.5. Soit K un corps; on dit qu'une K -algèbre E est une *algèbre étale* s'il existe une famille finie d'extensions finies, séparables sur K , $(E_i/K)_{i \in I}$, telles que $E \simeq \prod_{i \in I} E_i$ ², où l'isomorphisme est de K -algèbres.

Définition 3.6. Soit X une surface de Riemann, on indique $\mathcal{M}(X)$ l'anneau des fonctions méromorphes de X . Dans le cas $X = \emptyset$ on pose $\mathcal{M}(X) = 0$.

Comme B est connexe et non vide alors $\mathcal{M}(B)$ est un corps. Soit (X, π_X) un revêtement ramifié analytique fini de B , on donne à $\mathcal{M}(X)$ la structure de $\mathcal{M}(B)$ -algèbre grâce à π_X en prenant $\pi_X^*: \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ qui à f associe $f \circ \pi_X$. Si (Y, π_Y) est un autre revêtement ramifié analytique fini de B et $g: X \rightarrow Y$ morphisme de revêtements ramifiés analytiques finis, on peut construire un morphisme $g^*: \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ qui à une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(Y)$ associe $f \circ g \in \mathcal{M}(X)$ ³. Le morphisme g^* est un morphisme de $\mathcal{M}(B)$ -algèbres, comme g est un morphisme de revêtements ramifiés analytiques finis. Alors on a d'un côté la catégorie $\mathcal{V}_B$, la catégorie des revêtements ramifiés analytiques finis de B . De l'autre côté la catégorie $\mathcal{E}_B$ des algèbres étales sur $\mathcal{M}(B)$ munie des morphismes de $\mathcal{M}(B)$ -algèbres. On peut définir le foncteur contravariant $\mathcal{M}: \mathcal{V}_B \rightarrow \mathcal{E}_B$ qui à X associe $\mathcal{M}(X)$ et à $f \in \text{Hom}_{\mathcal{V}_B}(X, Y)$ associe f^* . On a le résultat suivant :

2. On considère l'algèbre 0 une K -algèbre, c'est le cas quand $I = \emptyset$.

3. Si $X = \emptyset$ alors $g = \emptyset$ alors $g^* = 0$.

Théorème 3.7. Soit B une surface de Riemann connexe et compacte. Soient $\mathcal{V}_B$ la catégorie des revêtements ramifiés analytiques finis de B et $\mathcal{E}_B$ la catégorie des algèbres étales sur $\mathcal{M}(B)$. Soit $\mathcal{M}: \mathcal{V}_B \rightarrow \mathcal{E}_B$ le foncteur qui à un revêtement ramifié analytique fini associe l'algèbre étale des fonctions méromorphes. Alors $\mathcal{M}$ est une anti-équivalence de catégories.

En plus si (X, π_X) et (Y, π_Y) sont deux revêtement ramifié analytique fini de B et $\Delta_X, \Delta_Y \subseteq B$ les ensembles des points de ramification des deux revêtements et soit $\Delta = \Delta_X \cup \Delta_Y$.

Proposition 3.8. On a les résultats suivants :

- a) Le degré de $\mathcal{M}(X)$ comme $\mathcal{M}(B)$ -espace vectoriel c'est égal au degré du revêtement ramifié fini ;
- b) On a $\mathcal{M}(X \sqcup Y) = \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(Y)$ donc l'algèbre $\mathcal{M}(X)$ est un corps si et seulement si X est connexe et non vide. Plus généralement les composantes connexes de X correspondent bijectivement aux idéaux maximaux de $\mathcal{M}(X)$;
- c) Le produit fibré de X et Y n'est pas en général un revêtement ramifié. Par contre on peut voir les deux revêtements sur $B - \Delta$. On peut faire le produit fibré de ces revêtements finis et après le prolonger à un revêtement ramifié analytique fini (Z, π_Z) . Ce qu'on obtient c'est $\mathcal{M}(Z) = \mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{M}(B)} \mathcal{M}(Y)$;
- d) Supposons X connexe et non vide, alors $X|_{B-\Delta_X}$ est galoisien si et seulement si $\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B)$ est une extension galoisienne. Dans ce cas $\text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B)) = \text{Aut}_B(X) = \text{Aut}_{B-\Delta}(X|_{B-\Delta})$;
- e) Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme alors f^* est injectif (resp. surjectif) si et seulement si f est surjectif (resp. injectif).

Définition 3.9. Soit E une algèbre étale, on dit qu'un certain revêtement ramifié analytique fini (X, π) réalise E si l'image par le foncteur $\mathcal{M}$ de (X, π) c'est isomorphe à E . Pour tout algèbre étale E on peut trouver (X, π) qui réalise E . On appelle $\Delta_E \subseteq B$ l'ensemble des ramifications de (X, π) et on l'appelle l'ensemble des ramifications de E .

Remarque. Comme le cardinal de la fibre de tout point de la base est invariant par isomorphisme de B -espace, l'ensemble Δ_E ne dépend pas du choix de (X, π) .

Proposition 3.10. Soient E une algèbre étale sur $\mathcal{M}(B)$ et F une sous-algèbre. Alors $\Delta_F \subseteq \Delta_E$.

Démonstration. Soient (X, π_X) et (Y, π_Y) deux revêtements ramifiés analytiques finis de B qui réalisent E et F respectivement et soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de B -espaces telle que f^* soit l'inclusion de F vers E . Pour le point e) de la proposition 3.8 on a que f est surjective. Si $b \notin \Delta_E$, alors sur un voisinage U de b , $X|_U$ est un revêtement fini. Ainsi par la surjectivité de f , $Y|_U$ est aussi un revêtement fini, car l'image de tout feuillet de $X|_U$ n'a pas de ramifications. Donc en particulier on a $b \notin \Delta_F$. $\square$

3.2 L'action de monodromie sur les extensions de corps

Soit $\pi: X \rightarrow Y$ un revêtement d'espaces topologiques, alors pour tout point $y \in Y$, le groupe fondamental $\pi_1(Y, y)$ agit sur la fibre de y par l'action de monodromie. Si $x \in X(y)$ et $\gamma \in \pi_1(Y, y)$, on va noter $\gamma \cdot x$ l'image de x par l'action de γ .

On va voir comme cette action devient une action sur les corps des fonctions méromorphes. On fixe B surface de Riemann connexe et compacte, Δ partie finie de B , $b \in B - \Delta$ et Ω clôture algébrique de $\mathcal{M}(B)$. D'ici toutes les extensions de corps seront sur $\mathcal{M}(B)$ donc on écrit simplement les corps pour indiquer les extensions.

Soit E une extension galoisienne finie réalisée par (X, π_X) telle que $\Delta_E \subseteq \Delta$. On fixe un isomorphisme entre E et $\mathcal{M}(X)$. Pour tout $x \in X(b)$ on définit une application $\theta_x: \pi_1(B - \Delta, b) \rightarrow \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$ de la façon suivante : le groupe fondamental $\pi_1(B - \Delta, b)$ opère sur $X(b)$ par l'action de monodromie. Le revêtement fini $X|_{B-\Delta}$ est galoisien par le point d) de la proposition 3.8 et encore pour le point d) il existe un unique automorphisme g de (X, π_X) tel que $g(x) = \gamma \cdot x$. On note $\theta_x(\gamma)$ l'automorphisme de E induit par $g^* \in \text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B))$.

Proposition 3.11. Soit $x \in X(b)$, l'application $\theta_x: \pi_1(B - \Delta, b) \rightarrow \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$ est un morphisme de groupes surjectif qui a comme noyau le stabilisateur de x par l'action de monodromie.

Démonstration. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(B - \Delta, b)$, alors comme l'action de monodromie est une action $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot x = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot x)$ et donc θ_x est un morphisme de groupes. La surjectivité de θ_x est encore une conséquence de l'équivalence de catégories. À tout automorphisme de $E/\mathcal{M}(B)$ correspond un et un seul

automorphisme de $X|_{B-\Delta}$. Pour calculer le noyau de θ_x on note que c'est suffisant trouver les classes dans $\pi_1(B-\Delta, b)$ qui induisent l'identité de $X|_{B-\Delta}$. Par connexité de $X|_{B-\Delta}$ c'est exactement le stabilisateur de x par l'action de monodromie. $\square$

Remarque.

1. Le morphisme θ_x dépend du choix du point x .
2. Pour $\gamma \in \pi_1(B-\Delta, b)$, $\theta_x(\gamma) \in \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$ ne dépend que de l'image de γ dans $\pi_1(B-\Delta_E, b)$ via le morphisme de groupes fondamentaux induit par l'inclusion $B-\Delta \hookrightarrow B-\Delta_E$.

On va vérifier la fonctorialité de θ_x . Soit F une autre extension galoisienne finie avec $\Delta_F \subseteq \Delta$ réalisée par (Y, π_Y) . On identifie $\mathcal{M}(Y)$ avec F en fixant un isomorphisme.

Lemme 3.12. *Soit $f: E \rightarrow F$ un morphisme de $\mathcal{M}(B)$ -algèbres et soit $u: Y \rightarrow X$ l'unique morphisme de B -espaces t.q. $u^* = f$. Alors pour tout $y \in Y(b)$ et pour tout $\gamma \in \pi_1(B-\Delta, b)$, le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} F & \xleftarrow{\theta_y(\gamma)} & F \\ \uparrow f & & \uparrow f \\ E & \xleftarrow{\theta_x(\gamma)} & E \end{array}$$

est commutatif, où $x := u(y)$.

Démonstration. Soient $g \in \text{Aut}_B(X)$ et $h \in \text{Aut}_B(Y)$ tels que $g(x) = \gamma \cdot x$ et $h(y) = \gamma \cdot y$. On veut montrer que

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & Y \\ \downarrow u & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

est commutatif. Grâce à cela on obtient le résultat voulu en appliquant le foncteur $\mathcal{M}$. Comme $Y|_{B-\Delta}$ est un revêtement connexe de $B-\Delta$, il suffit de montrer que le diagramme commute sur y , ou bien que $u(\gamma \cdot y) = \gamma \cdot u(y)$. Soit $\tilde{\gamma}$ le relèvement d'un représentant de γ dans Y d'origine y , alors $u \circ \tilde{\gamma}$ est le relèvement du chemin γ dans X avec origine x . Ainsi

$$u(\gamma \cdot y) = u(\tilde{\gamma}(1)) = (u \circ \tilde{\gamma})(1) = \gamma \cdot u(y).$$

$\square$

3.3 Le groupe de Galois de $\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B)$

Soient E une extension galoisienne finie de $\mathcal{M}(B)$ telle que $\Delta_E \subseteq \Delta$ et X un revêtement ramifié analytique de B .

On note $\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B)$ l'extension composée de toutes ses sous-extensions finies E de Ω telles que $\Delta_E \subseteq \Delta$.

Proposition 3.13. *L'extension $\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B)$ est galoisienne.*

Démonstration. L'extension est séparable parce que $\mathcal{M}(B)$ a caractéristique 0. Il faut vérifier qu'elle soit aussi normale. Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{M}(B)} \Omega$ et pour toute extension E , $\Delta_{\sigma(E)} = \Delta_E$, donc $\text{Aut}_{\mathcal{M}(B)} \Omega$ agit sur l'ensemble des sous-extensions finies de Ω qui ont ramifications dans Δ . En particulier cet ensemble est invariant, donc Ω_Δ est invariante. $\square$

On veut utiliser le morphisme θ_x défini dans la sous-section précédente pour construire un isomorphisme entre $\widehat{\pi}_1(B - \Delta, b)$ et $\text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$.

Pour tout $E \in \mathcal{G}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$ on fixe un revêtement ramifié analytique fini (X_E, π_E) de B qui réalise $E/\mathcal{M}(B)$ et on identifie E avec $\mathcal{M}(X)$. Si on a deux extensions de $\text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$, E et F telles que $E \subseteq F$ on a un et un seul B -morphisme $p_E^F : X_F \rightarrow X_E$ tel que $(p_E^F)^*$ soit l'inclusion de E dans F . Alors $((X_E)_{E \in \mathcal{G}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))}, (p_E^F)_{E \subseteq F})$ est un système projectif dans la catégorie $B\text{-}\mathcal{E}_{\text{an}}$. Par le théorème 1.7 l'ensemble $(\varprojlim X_E)(b) = \varprojlim (X_E(b))$ n'est pas vide, ainsi on peut choisir $x \in (\varprojlim X_E)(b)$. Pour tout $E \in \mathcal{G}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$ on note $p_E : \varprojlim_{F \in \mathcal{G}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))} X_F \rightarrow X_E$ les morphismes de la limite et soient $x_E := p_E(x)$. Si $E \subseteq F$ alors l'inclusion induit un morphisme de restriction $\rho_E^F : \text{Gal}(F/\mathcal{M}(B)) \rightarrow \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$. On note $G := \pi_1(B - \Delta, b)$, par le lemme 3.12 le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Gal}(F/\mathcal{M}(B)) \\ & \nearrow \theta_{x_F} & \downarrow \rho_E^F \\ G & & \\ & \searrow \theta_{x_E} & \downarrow \\ & & \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)) \end{array}$$

est commutatif.

Pour tout $E \in \mathcal{G}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$ soit N_E le stabilisateur de x_E dans G et $h_E : G/N_E \rightarrow \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$ l'isomorphisme induit par θ_{x_E} . On a que si $E \subseteq F$, alors $N_F \subseteq N_E$. En fait si un lacet fixe x_F , il doit fixer aussi x_E . On a donc une projection $s_E^F : G/N_F \rightarrow G/N_E$. On a aussi la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} G/N_F & \xrightarrow{h_F} & \text{Gal}(F/\mathcal{M}(B)) \\ \downarrow s_E^F & & \downarrow \rho_E^F \\ G/N_E & \xrightarrow{h_E} & \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)) \end{array} .$$

Par la proposition 1.5 on peut relever les isomorphismes $(h_E)_E$ à un isomorphisme $\widehat{\theta}_x : \varprojlim G/N_E \rightarrow \text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$. Par le lemme suivant $\varprojlim G/N_E = \widehat{\pi}_1(B - \Delta, b)$.

Lemme 3.14. *Soit N un sous-groupe distingué de $\pi_1(B - \Delta, b)$ d'indice fini. Alors il existe un revêtement fini galoisien (Y, π_Y) de $B - \Delta$ tels que pour tout point $y \in Y(b)$, le stabilisateur de y par l'action de monodromie de $\pi_1(B - \Delta, b)$ soit N . En plus il existe une sous-extension galoisienne finie E de Ω_Δ telle que $N = N_E$.*

Démonstration. La première partie est un résultat classique de la théorie des revêtements. On utilise le fait que $B - \Delta$ soit un espace topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Pour la deuxième on peut prendre $(\hat{Y}, \hat{\pi})$ le revêtement ramifié analytique fini associé. Alors si $E' := \mathcal{M}(\hat{Y})$, l'extension sur $\mathcal{M}(B)$ est galoisienne finie. On peut plonger E' dans Ω , qu'on appelle E . On note que $\Delta_{E'} = \Delta_E \subseteq \Delta$ et donc E est l'extension cherchée. $\square$

4 Groupe de Galois absolu de $\mathcal{M}(B)$

Dans la section précédente, on a déjà établi pour chaque

$$x \in \varprojlim_{E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))} X_E(b)$$

un isomorphisme $\widehat{\theta}_x$ entre $\widehat{\pi}_1(B - \Delta, b)$ et $\text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$. Pour relier de plus le groupe de Galois absolu

$$\text{Gal}(\Omega/\mathcal{M}(B)) = \varprojlim_{E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))} \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$$

à certains groupes fondamentaux, il nous fait construire un système projective indexé par les $\Delta \in \mathcal{D}(B)$ où on désigne par $\mathcal{D}(B)$ l'ensemble des parties finies de B . Mais les groupes fondamentaux en général dépendent du choix du point de base, donc quand les Δ parcourt sur toutes les parties finies d B , on ne dispose pas d'un point de base à priori pour tous les $\widehat{\theta}_x$ car fixant un point base b on s'interdit de considérer les Δ contenant b . Pour cette raison, on introduit dans la sous-section suivante la notion de groupe fondamental relatif à un germe de chemin qui est isomorphes au groupe fondamental « ordinaire » et vérifient les même propriétés, à l'aide de laquelle on va établir enfin l'identification entre $\text{Gal}(\Omega/\mathcal{M}(B))$ et la limite projective de certains groupes fondamentaux relatifs à un germe de chemin.

4.1 Groupe fondamental relatif à un germe de chemin

Dans cette sous-section on va définir les groupes fondamentaux relatifs à un germe de chemin, et démontrer en plus les « bonnes » propriétés qu'ils vérifient.

Définition-Proposition 4.1. Soit $\beta: [0, 1] \rightarrow B$ une application continue injective. Pour toute partie finie $\Delta \subset B$, l'ensemble $\{c \in [0, 1] \mid \beta([0, c]) \subset B - \Delta\}$ est borné et on note par c_Δ sa plus grande borne supérieure, i.e.

$$c_\Delta := \sup\{c \in [0, 1] \mid \beta([0, c]) \subset B - \Delta\}.$$

On note $\pi_1(B - \Delta, \beta)$ l'ensemble des couples (t, γ) où $t \in]0, c_\Delta[$ et $\gamma \in \pi_1(B - \Delta, \beta(t))$ par la relation d'équivalence identifiant (t_1, γ_1) à (t_2, γ_2) (on suppose que $t_1 \leq t_2$) si γ_2 se déduit de γ_1 par l'isomorphisme de $\pi_1(B - \Delta, \beta(t_1))$ sur $\pi_1(B - \Delta, \beta(t_2))$ défini par le chemin $\beta|_{[t_1, t_2]}$, i.e.

$$\gamma_2 = (\beta|_{[t_1, t_2]})_\#(\gamma_1) \tag{4.1.1}$$

où $(\beta|_{[t_1, t_2]})_\#$ est l'isomorphisme de groupes⁴

$$\begin{aligned} (\beta|_{[t_1, t_2]})_\# : \pi_1(B - \Delta, \beta(t_1)) &\rightarrow \pi_1(B - \Delta, \beta(t_2)) \\ [c] &\mapsto [\beta|_{[t_1, t_2]} \cdot c \cdot \beta|_{[t_2, t_1]}] \end{aligned}$$

avec $\beta|_{[t_2, t_1]}$ signifiant le chemin inverse de $\beta|_{[t_1, t_2]}$. Alors $\pi_1(B - \Delta, \beta)$ est de façon naturelle un groupe, et on l'appelle le groupe fondamental relatif au germe de chemin β .

Démonstration. On va vérifier d'abord que la relation définie par 4.1.1 sur l'ensemble $\pi_1(B - \Delta, \beta)$ est bien une relation d'équivalence, et ensuite montrer que $\pi_1(B - \Delta, \beta)$ muni d'une multiplication naturelle est bien un groupe.

— La relation définie par l'équation 4.1.1 est bien une relation d'équivalence :

réflexivité Soit $t \in [0, c_\Delta]$, alors $\beta|_{[t, t]} = \epsilon_{\beta(t)}$ le lacet trivial basé en $\beta(t)$, donc $(\beta|_{[t, t]})_\# = id_{\pi_1(B, \beta(t))}$, d'où la réflexivité.

symétrie Soient $t_1, t_2 \in [0, c_\Delta]$ et soient $\gamma_1 \in \pi_1(B, \beta(t_1))$, $\gamma_2 \in \pi_1(B, \beta(t_2))$ tels que

$$\gamma_2 = (\beta|_{[t_1, t_2]})_\# \gamma_1.$$

Comme $\beta|_{[t_2, t_1]}$ est le chemin inverse de $\beta|_{[t_1, t_2]}$, donc $(\beta|_{[t_2, t_1]})_\# = (\beta|_{[t_1, t_2]})_\#^{-1}$, donc on a

$$\gamma_1 = (\beta|_{[t_1, t_2]})_\#^{-1}(\gamma_2) = (\beta|_{[t_2, t_1]})_\# \gamma_2$$

d'où la symétrie.

4. En général, soit X un espace topologique connexe par arcs, soient x_0 et x_1 deux points de X , alors tout chemin ρ qui associe x_0 à x_1 induit un isomorphisme de groupes

$$\rho_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), [c] \mapsto [\rho \cdot c \cdot \bar{\rho}].$$

transitivité Soient $t_1, t_2, t_3 \in [0, c_\Delta]$, et soient $\gamma_1 \in \pi_1(B, \beta(t_1))$, $\gamma_2 \in \pi_1(B, \beta(t_2))$, $\gamma_3 \in \pi_1(B, \beta(t_3))$ tels que

$$\gamma_2 = (\beta|_{[t_1, t_2]})_\# \gamma_1,$$

$$\gamma_3 = (\beta|_{[t_2, t_3]})_\# \gamma_2.$$

Comme $\beta|_{[t_1, t_3]} = \beta|_{[t_2, t_3]} \cdot \beta|_{[t_1, t_2]}$, on a $(\beta|_{[t_1, t_3]})_\# = (\beta|_{[t_2, t_3]})_\# \circ (\beta|_{[t_1, t_2]})_\#$, ainsi

$$\gamma_3 = (\beta|_{[t_2, t_3]})_\# \circ (\beta|_{[t_1, t_2]})_\# (\gamma_1) = (\beta|_{[t_1, t_3]})_\# \gamma_1$$

d'où la transitivité.

— Définissons la multiplication dans $\pi_1(B - \Delta, \beta)$ comme ci-dessous :

On fixe un $t \in]0, c_\Delta[$. Soit $\gamma_1 \in \pi_1(B - \Delta, \beta(t_1))$ et $\gamma_2 \in \pi_1(B - \Delta, \beta(t_2))$. Alors $[(t_1, \gamma_1)]$ et $[(t_2, \gamma_2)]$ sont deux classes dans $\pi_1(B - \Delta, \beta)$. La multiplication de $[(t_1, \gamma_1)]$ et $[(t_2, \gamma_2)]$ est définie comme la classe de

$$(t, (\beta|_{[t_1, t]})_\# \gamma_1 \cdot_t (\beta|_{[t_2, t]})_\# \gamma_2)$$

où la multiplication $\cdot_t$ se fait dans le groupe $\pi_1(B - \Delta, \beta(t))$. Ainsi, on a

$$[(t_1, \gamma_1)] \cdot [(t_2, \gamma_2)] = [(t, (\beta|_{[t_1, t]})_\# \gamma_1 \cdot (\beta|_{[t_2, t]})_\# \gamma_2)].$$

Comme $\cdot_t$ munit $\pi_1(B - \Delta, \beta(t))$ d'une structure de groupe, donc $\cdot$ donne par définition une structure de groupe à $\pi_1(B - \Delta, \beta)$. Il reste à vérifier que la multiplication $\cdot$ ainsi définie ne dépend pas du choix de $t \in]0, c_\Delta[$. En effet, si l'on choisit un autre $t' \in]0, c_\Delta[$, alors comme $\beta|_{[t, t']}$ est un morphisme de groupes, on a

$$\begin{aligned} (\beta|_{[t_1, t']})_\# \gamma_1 \cdot_{t'} (\beta|_{[t_2, t']})_\# \gamma_2 &= (\beta|_{[t, t']})_\# \circ (\beta|_{[t_1, t]})_\# (\gamma_1) \cdot_{t'} (\beta|_{[t, t']})_\# \circ (\beta|_{[t_2, t]})_\# (\gamma_2) \\ &= (\beta|_{[t, t']})_\# ((\beta|_{[t_1, t]})_\# \gamma_1 \cdot_t (\beta|_{[t_2, t]})_\# \gamma_2) \end{aligned}$$

d'où

$$(t', (\beta|_{[t_1, t']})_\# \gamma_1 \cdot_{t'} (\beta|_{[t_2, t']})_\# \gamma_2) \sim (t, (\beta|_{[t_1, t]})_\# \gamma_1 \cdot_t (\beta|_{[t_2, t]})_\# \gamma_2).$$

Donc la définition de la multiplication $\cdot$ est indépendante du choix de $t \in]0, c_\Delta[$.

Alors $\cdot$ donne à $\pi_1(B - \Delta, \beta)$ une structure de groupe. □

On démontre maintenant une caractérisation du groupe fondamental relatif à un germe de chemin, à savoir que le groupe fondamental relatif à un germe de chemin est effectivement la limite inductive de certains groupes fondamentaux. Pour cela on montre tout à bord une proposition qui donne une description des limites inductives.

Proposition 4.2. Soit $((X_i)_{i \in I}, (f_i^j)_{i \leq j})$ un système inductif dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ et soit X la limite inductive de ce système, i.e.

$$X = \varinjlim_{i \in I} X_i$$

Alors on a

$$X = (\coprod_{i \in I} X_i) / \sim \quad (4.1.2)$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est définie comme ci-dessous :

Soient $x_i \in X_i$ et $x_j \in X_j$ avec $i \leq j$. Alors x_i et x_j se voient comme éléments dans $\coprod_{i \in I} X_i$. On dit que $x_i \sim x_j$ si $x_j = f_i^j(x_i)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'ensemble X muni des applications naturelle $f_i: X_i \rightarrow X$ défini par la formule 4.1.2 vérifie la propriété universelle. Soit Y un ensemble muni d'une famille d'applications $(g_i)_{i \in I}$ où $g_i: X_i \rightarrow Y$ compatible avec les (f_i^j) , i.e. pour tous $i \leq j$, $g_i \circ f_i^j = g_j$. Construisons une application $g: X \rightarrow Y$ telle que les g_i se factorisent via g . En effet, pour $[x_i] \in X$ avec $x_i \in X_i \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X_i$, on pose $g([x_i]) = g_i(x_i)$. Cela ne dépend pas du choix du représentant x_i par la compatibilité entre les $(g_i)_{i \in I}$ et les $(f_i^j)_{i \leq j}$, d'où l'existence de g . De plus, si l'on a une autre application g' qui factorise les g_i , alors pour tout $[x_i] \in X$ on a

$$g'([x_i]) = g' \circ f_i(x_i) = g_i(x_i) = g([x_i])$$

donc $g = g'$, d'où l'unicité de g . □

De plus, on a un résultat concernant les limites inductives dual à la proposition 1.6, à savoir :

Proposition 4.3. *Soit $\mathfrak{A}$ un certain univers et soient $\mathcal{G}_r$, $\mathcal{C}_o$ et $\mathcal{G}_r\mathcal{C}_o$ les catégories définies sur $\mathfrak{A}$. Alors tout système inductif indexé par un ensemble appartenant à $\mathfrak{A}$, admet une limite. Les limites inductives dans ces catégories commutent respectivement avec les foncteurs d'oubli vers $\mathcal{E}_{ns}$. Les limites projectives de $\mathcal{G}_r\mathcal{C}_o$ commutent aussi avec le foncteur d'oubli vers $\mathcal{G}_r$ et vers $\mathcal{C}_o$.*

Proposition 4.4. *Le groupe $\pi_1(B - \Delta, \beta)$ est la limite inductive des groupes fondamentaux $(\pi_1(B - \Delta, \beta(t)))_{t \in]0, c_\Delta[}$, i.e.*

$$\pi_1(B - \Delta, \beta) = \varinjlim_{t \in]0, c_\Delta[} \pi_1(B - \Delta, \beta(t)).$$

Démonstration. On va tout d'abord préciser l'énoncé de la proposition. Pour tous $t, t' \in]0, c_\Delta[$ tels que $t \leq t'$, on dispose d'un morphisme de groupes

$$(\beta|_{[t, t']})_\# : \pi_1(B - \Delta, \beta(t)) \rightarrow \pi_1(B - \Delta, \beta(t')).$$

De plus, pour $t \leq t' \leq t''$, on a $(\beta|_{[t, t'']})_\# = (\beta|_{[t', t'']})_\# \circ (\beta|_{[t, t']})_\#$, d'où on obtient un système inductif

$$((\pi_1(B - \Delta, \beta(t)))_{t \in]0, c_\Delta[}, ((\beta|_{[t, t']})_\#)_{t \leq t'}).$$

Donc d'après la définition 4.1, le résultat se déduit des propositions précédentes 4.2 et 4.3 $\square$

Remarque. Dans la proposition précédente 4.4, on montre que $\pi_1(B - \Delta, \beta)$ est la limite inductive du système $(\pi_1(B - \Delta, \beta(t)))_{t \in]0, c_\Delta[}$, alors on dispose pour tout $t \in]0, c_\Delta[$ d'un morphisme canonique de groupes $\chi_t : \pi_1(B - \Delta, \beta(t)) \rightarrow \pi_1(B - \Delta, \beta)$. Mais les morphismes du système projectif $(\pi_1(B - \Delta, \beta(t)))_{t \in]0, c_\Delta[}$ sont tous isomorphismes, donc pour tout $t \in]0, c_\Delta[$, le morphisme canonique χ_t l'est aussi. Cela explique pourquoi on l'appelle une limite « triviale ».

4.2 Lien fonctoriel avec les groupes de Galois

En combinant la caractérisation des groupe fondamental relatif à un germe de chemin (la proposition 4.4) avec l'équivalence de catégories (la proposition 3.8), on construit un morphisme canonique (fonctoriel) suivant entre le groupe fondamental relatif à un germe de chemin et le groupe de Galois d'une extension des corps de fonctions méromorphes :

Soient X une surface de Riemann connexe compacte, $\pi : X \rightarrow B$ un revêtement ramifié analytique de B et Δ son ensemble de ramification. Notons $\Gamma(\beta, X)$ l'ensemble des relèvements continus de $\beta|_{]0, c_\Delta[}$ dans X . Alors si π est de degré d , par l'unicité des relèvements, $\Gamma(\beta, X)$ est un ensemble de cardinal d . On suppose maintenant que $X|_{B-\Delta} \rightarrow B - \Delta$ soit un revêtement galoisien. Soit $b \in B - \Delta$, dans la sous-section 3.2, on a déjà construit pour chaque $x \in X(b)$ un morphisme de groupes fonctoriel (par rapport à X) $\theta_x : \pi_1(B - \Delta, b) \rightarrow \text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B))$. Mais que se passe-t-il pour les groupe fondamental relatif à un germe de chemin ? En effet, on peut construire pour chaque relèvement ξ de $\beta|_{]0, c_\Delta[}$ un morphisme $\theta_\xi : \pi_1(X - \Delta, \beta) \rightarrow \text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B))$. C'est un analogue de la construction de θ_x pour un « relèvement » x de b (i.e. x est au-dessus de b). En effet, on construit θ_ξ à partir des $\theta_{\xi(t)}$ en utilisant la propriété universelle de la limite inductive et donc θ_ξ vérifie « naturellement » la fonctorialité.

Proposition 4.5. *Avec les notations ci-dessus, soit $\xi \in \Gamma(\beta, X)$ un relèvement de $\beta|_{]0, c_\Delta[}$. Alors il existe une unique morphisme de groupes*

$$\theta_\xi : \pi_1(B - \Delta, \beta) \rightarrow \text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B))$$

tel que pour tout $t \in]0, c_\Delta[$, on ait $\theta_\xi \circ \chi_t = \theta_{\xi(t)}$ où χ_t est l'isomorphisme canonique $\pi_1(B - \Delta, \beta(t)) \rightarrow \pi_1(B - \Delta, \beta)$ donné dans la remarque de la proposition 4.4.

Démonstration. D'après la proposition 4.4 et la propriété universelle de la limite inductive, il suffit de montrer que les morphismes $(\theta_{\xi(t)})_{t \in]0, c_\Delta[}$ sont compatibles avec le système inductive $(\pi_1(B - \Delta, \beta(t)))_{t \in]0, c_\Delta[}$, à savoir que pour $t, t' \in]0, c_\Delta[$ tels que $t \leq t'$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(B - \Delta, \beta(t)) & & \\
\downarrow (\beta|_{[t, t']})^\# & \searrow \theta_{\xi(t)} & \\
& & \text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B)) \\
& \nearrow \theta_{\xi(t')} & \\
\pi_1(B - \Delta, \beta(t')) & &
\end{array}$$

En effet, soit $\gamma \in \pi_1(B - \Delta, \beta(t))$ et soit $\gamma' = (\beta|_{[t, t']})^\# \gamma$. Choisissons un lacet α de $B - \Delta$ représentant γ , alors $\beta|_{[t, t']} \cdot \alpha \cdot \beta|_{[t', t]}$ est un représentant de γ' . En rappelant la définition du morphisme θ_x dans la sous-section 3.2, on choisit $\tilde{\alpha}_{\xi(t)}$ un relèvement de α dans X d'origine $\xi(t)$. Alors l'extrémité de $\tilde{\alpha}_{\xi(t)}$ est $\gamma \cdot \xi(t)$. Soit $g \in \text{Aut}_B(X)$ l'unique automorphisme tel que $g(\xi(t)) = \gamma \cdot \xi(t)$, et on a

$$\theta_{\xi(t)}(\gamma) = g^* \in \text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B)).$$

Considérons le chemin $g(\xi|_{[t, t']}) \cdot \tilde{\alpha}_{\xi(t)} \cdot \xi|_{[t', t]}$ dans X , il est un relèvement du lacet $\beta|_{[t, t']} \cdot \alpha \cdot \beta|_{[t', t]}$ d'origine $\xi(t')$ et d'extrémité $g(\xi(t'))$. Ainsi par la définition de l'action de monodromie, $g(\xi(t')) = \gamma' \cdot \xi(t')$, d'où $\theta_{\xi(t')}(\gamma') = g^* = \theta_{\xi(t)}(\gamma)$, i.e. $\theta_{\xi(t)}(\gamma) = \theta_{\xi(t')} \circ (\beta|_{[t, t']})^\#(\gamma)$, ce qui implique la commutativité du diagramme ci-dessus. $\square$

On va démontrer dans la sous-section suivante que le morphisme θ_ξ ainsi obtenu est fonctoriel par rapport à X .

4.3 Fonctorialité par rapport aux Δ

Ayant introduit la notion de groupe fondamental relatif à un germe de chemin, on démontre maintenant que les groupes fondamentaux relatif au germe de chemin β de $B - \Delta$ forment bien un système projectif indexé par les $\Delta \in \mathcal{D}(B)$, ce qui nous fournit un chemin aboutissant à l'identification du groupe de Galois absolu de $\mathcal{M}(B)$.

Proposition 4.6. *Soient Δ et Δ' deux parties finies de B , telles que $\Delta \subset \Delta'$ (d'où $c_{\Delta'} \leq c_\Delta$). Alors il existe un unique morphisme $r_{\Delta'}^{\Delta} : \pi_1(B - \Delta', \beta) \rightarrow \pi_1(B - \Delta, \beta)$ tel que pour tout $t \in]0, c_{\Delta'}[$ le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(B - \Delta', \beta(t)) & \xrightarrow{(\iota_{\Delta'}^{\Delta})^*} & \pi_1(B - \Delta, \beta(t)) \\
\downarrow \chi_t & & \downarrow \chi_t \\
\pi_1(B - \Delta', \beta) & \xrightarrow{r_{\Delta'}^{\Delta}} & \pi_1(B - \Delta, \beta)
\end{array}$$

où $\iota_{\Delta'}^{\Delta}$ est l'inclusion $B - \Delta' \hookrightarrow B - \Delta$.

Démonstration. Par la proposition 1.5, il suffit de vérifier que pour tous $s, t \in]0, c_{\Delta'}[$ tels que $S \leq t$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(B - \Delta', \beta(s)) & \xrightarrow{(\iota_{\Delta'}^{\Delta})^*} & \pi_1(B - \Delta, \beta(s)) \\
\downarrow (\beta|_{[s, t]})^\# & & \downarrow (\beta|_{[s, t]})^\# \\
\pi_1(B - \Delta', \beta(t)) & \xrightarrow{(\iota_{\Delta'}^{\Delta})^*} & \pi_1(B - \Delta, \beta(t)).
\end{array}$$

En effet, comme $0 < s \leq t < c_{\Delta'}$, on a $\iota_{\Delta'}^{\Delta'} \circ \beta|_{[s,t]} = \beta|_{[s,t]}$. Donc pour tout $\gamma = [\alpha] \in \pi_1(B - \Delta', \beta(s))$, on a

$$\begin{aligned} (\iota_{\Delta'}^{\Delta'})_* \circ (\beta|_{[s,t]})_{\#}(\gamma) &= (\iota_{\Delta'}^{\Delta'})_*[\beta|_{[s,t]} \cdot \alpha \cdot \beta|_{[t,s]}] = [(\iota_{\Delta'}^{\Delta'} \circ \beta|_{[s,t]}) \cdot (\iota_{\Delta'}^{\Delta'} \circ \alpha) \cdot (\iota_{\Delta'}^{\Delta'} \circ \beta|_{[t,s]})] \\ &= [\beta|_{[s,t]} \cdot (\iota_{\Delta'}^{\Delta'} \circ \alpha) \cdot \beta|_{[t,s]}] = (\beta|_{[s,t]})_{\#}[\iota_{\Delta'}^{\Delta'} \circ \alpha] \\ &= (\beta|_{[s,t]})_{\#} \circ (\iota_{\Delta'}^{\Delta'})_*(\gamma) \end{aligned}$$

d'où la commutativité du digramme ci-dessus. $\square$

Démontrons maintenant que le morphisme θ_{ξ} obtenu dans la proposition 4.5 de la sous-section précédente est fonctoriel par rapport à X . En effet, soient X et X' deux revêtements ramifiés analytiques finis de B avec leurs ensembles de ramification notés par Δ et par Δ' respectivement. Soit $u: X' \rightarrow X$ un morphisme de revêtements ramifiés. Comme u est analytique non-constante, X et X' sont tous connexes, on a forcément que u est surjective. D'après la proposition 3.8, $u^*: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X')$ est injective, et donc par la proposition 3.10 on a $\Delta \subset \Delta'$, par suite $c_{\Delta'} \leq c_{\Delta}$.

$$\begin{array}{ccccc}]0, c_{\Delta'}[& \xrightarrow{\xi'} & X' & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow & & \searrow \xi & \nearrow \pi_{X'} & \downarrow \pi_X \\]0, c_{\Delta}[& \xrightarrow{\beta|_{]0, c_{\Delta}[}} & B & & B \end{array}$$

Pour tout $\xi' \in \Gamma(\beta, X')$, $u \circ \xi'$ est un relèvement de $\beta|_{]0, c_{\Delta'}[}$ dans X . Choisissons $s \in]0, c_{\Delta'}[$, par le relèvement des chemins, on obtient un unique relèvement ξ de $\beta|_{]0, c_{\Delta}[}$ dans X , tel que $\xi(s) = u \circ \xi'(s)$. Donc $\xi \in \Gamma(\beta, X)$. Mais $\xi|_{]0, c_{\Delta'}[}$ et $u \circ \xi'$ sont tous relèvement de $\beta|_{]0, c_{\Delta'}[}$ qui coïncident en un point, donc par l'unicité de relèvement on a $\xi|_{]0, c_{\Delta'}[} = u \circ \xi'$. Pour tout $\xi' \in \Gamma(\beta, X')$, notons l'unique élément ξ ainsi obtenu par $u_*(\xi')$.

Soit $\gamma' \in \pi_1(B - \Delta', \beta)$, soit $t \in]0, c_{\Delta'}[$, par le lemme 3.12 on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{u^*} & \mathcal{M}(X') \\ \downarrow \theta_{u_*(\xi')(t)}(\gamma') & & \downarrow \theta_{\xi'(t)}(\gamma') \\ \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{u^*} & \mathcal{M}(X') \end{array}$$

D'où on obtient en combinant avec la remarque 2 de la proposition 3.11 la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B - \Delta', \beta(t)) & \xrightarrow{(\iota_{\Delta'}^{\Delta'})_*} & \pi_1(B - \Delta, \beta(t)) \\ \downarrow \theta_{\xi'(t)} & & \downarrow \theta_{u_*(\xi')(t)} \\ \text{Gal}(\mathcal{M}(X')/\mathcal{M}(B)) & \xrightarrow{\rho_X^{X'}} & \text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B)) \end{array}$$

Donc par la proposition 4.5 et la remarque de la proposition 1.5, on obtient, en passant à la limite inductive (pour $t \in]0, c_{\Delta'}[$), le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(B - \Delta', \beta) & \xrightarrow{r_{\Delta'}^{\Delta'}} & \pi_1(B - \Delta, \beta) \\
\downarrow \theta_{\xi'} & & \downarrow \theta_{u_* \xi'} \\
\text{Gal}(\mathcal{M}(X')/\mathcal{M}(B)) & \xrightarrow{\rho_X^{X'}} & \text{Gal}(\mathcal{M}(X)/\mathcal{M}(B))
\end{array}$$

d'où la fonctorialité de θ_{ξ} .

4.4 Identification du groupe de Galois absolu de $\mathcal{M}(B)$

On dispose maintenant d'un bon système projectif $(\pi_1(B - \Delta, \beta))_{\Delta}$, et en faisant la complétion profinie de ces groupes fondamentaux, on obtient un système $(\widehat{\pi_1}(B - \Delta, \beta))_{\Delta}$. On veut identifier le groupe de Galois absolu de $\mathcal{M}(B)$ à la limite projective de ce système. Dans cette sous-section, on précisera cette identification.

Maintenant soit Ω une clôture algébrique de $\mathcal{M}(B)$. Pour chaque extension galoisienne E de $\mathcal{M}(B)$, par l'équivalence de catégories (la proposition 3.8) il existe une surface de Riemann X_E connexe compacte qui *réalise* E . En admettant l'axiome de choix, on a que l'ensemble

$$\Gamma = \varprojlim_{E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))} \Gamma(\beta, X_E)$$

n'est pas vide. Soit $\xi = (\xi_E)_{E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))} \in \Gamma$. Alors pour tout $E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$, on dispose par la proposition 4.5 d'un morphisme

$$\theta_{\xi_E} : \pi_1(B - \Delta_E, \beta) \rightarrow \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)).$$

Par la proposition 1.11, θ_{ξ_E} se factorise via $\widehat{\theta_{\xi_E}}$, i.e. on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\pi_1}(B - \Delta_E, \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_E}}} & \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)) \\
\uparrow \eta_E & \nearrow \theta_{\xi_E} & \\
\pi_1(B - \Delta_E, \beta) & &
\end{array}$$

De plus, pour $E, F \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$ telles que $E \subseteq F$, d'après la proposition 3.10 on a que le morphisme $u_E^F : X_F \rightarrow X_E$ correspondant à l'inclusion $E \hookrightarrow F$ est surjectif et que de plus $\Delta_F \subseteq \Delta_E$. Donc par la proposition 4.6, on dispose d'un morphisme $r_{\Delta_E}^{\Delta_F} : \pi_1(B - \Delta_F, \beta) \rightarrow \pi_1(B - \Delta_E, \beta)$. Par la proposition 1.11 on obtient un morphisme $\widehat{r_{\Delta_E}^{\Delta_F}} : \widehat{\pi_1}(B - \Delta_F, \beta) \rightarrow \widehat{\pi_1}(B - \Delta_E, \beta)$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\pi_1}(B - \Delta_F, \beta) & \xrightarrow{\widehat{r_{\Delta_E}^{\Delta_F}}} & \widehat{\pi_1}(B - \Delta_E, \beta) \\
\uparrow \eta_F & & \uparrow \eta_E \\
\pi_1(B - \Delta_F, \beta) & \xrightarrow{r_{\Delta_E}^{\Delta_F}} & \pi_1(B - \Delta_E, \beta)
\end{array}$$

D'ailleurs, comme $\xi \in \varprojlim_E \Gamma(\beta, X_E)$, donc on a $\xi_E|_{]0, c_{\Delta_F}[} = u_E^F \circ \xi_F$, i.e. $\xi_E = (u_E^F)_* \xi_F$. Ainsi par la fonctorialité de θ_ξ que l'on démontre dans la sous-section précédente, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(b - \Delta_F, \beta) & \xrightarrow{\theta_{\xi_F}} & \text{Gal}(F/\mathcal{M}(B)) \\ \downarrow r_{\Delta_E}^{\Delta_F} & & \downarrow \rho_E^F \\ \pi_1(B - \Delta_E, \beta) & \xrightarrow{\theta_{\xi_E}} & \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)) \end{array}$$

En combinant les trois diagrammes ci-dessus dans cette sous-section, on obtient enfin :

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\pi}_1(B - \Delta_F, \beta) & & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_F}}} & & \text{Gal}(F/\mathcal{M}(B)) \\ & \swarrow \eta_F & & \searrow \theta_{\xi_F} & \\ & \pi_1(B - \Delta_F, \beta) & & & \\ & \downarrow r_{\Delta_E}^{\Delta_F} & & & \downarrow \rho_E^F \\ & \pi_1(B - \Delta_E, \beta) & & & \\ & \swarrow \eta_E & & \searrow \theta_{\xi_E} & \\ \widehat{\pi}_1(B - \Delta_E, \beta) & & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_E}}} & & \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)) \end{array}$$

d'où la fonctorialité des $\widehat{\theta_{\xi_E}}$ par rapport à E . D'une même façon, on obtient pour chaque $t \in]0, c_{\Delta}[$ la fonctorialité des $\widehat{\theta_{\xi_E(t)}}$: $\widehat{\pi}_1(B - \Delta_E, \beta(t)) \rightarrow \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$ par rapport à E

Soit pour toute $\Delta \in \mathcal{D}(B)$, ξ_Δ l'image de ξ du morphisme naturel

$$\varprojlim_{E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))} \Gamma(\beta, X_E) \rightarrow \varprojlim_{E: \Delta_E \subseteq \Delta} \Gamma(\beta, X_E).$$

Alors par la proposition 1.5, on obtient un morphisme $\theta_{\xi_\Delta} : \widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta) \rightarrow \text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$ en passant les morphismes θ_{ξ_E} à la limite qui rend le diagramme suivant commutatif pour tout E avec $\Delta_E \subseteq \Delta$:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_\Delta}}} & \text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B)) \\ \downarrow \widehat{r_{\Delta_E}^{\Delta}} & & \downarrow \rho_E^{\Omega_\Delta} \\ \widehat{\pi}_1(B - \Delta_E, \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_E}}} & \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)) \end{array}$$

Soit $\Delta \subseteq \Delta'$ deux parties finies de B . Alors pour $E, F \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$ tels que $E \subseteq F$ et que $\Delta_E, \Delta_F \subseteq \Delta$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\pi_1}(B - \Delta', \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_{\Delta'}}}} & \text{Gal}(\Omega_{\Delta'}/\mathcal{M}(B)) \\
\downarrow \widehat{r_{\Delta_E}^{\Delta'}} & \searrow \widehat{r_{\Delta_F}^{\Delta'}} & \downarrow \rho_{F^{\Omega_{\Delta'}}} \\
& \widehat{\pi_1}(B - \Delta_F, \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_F}}} \text{Gal}(F/\mathcal{M}(B)) \\
& \swarrow \widehat{r_{\Delta_E}^{\Delta_F}} & \downarrow \rho_E^F \\
\widehat{\pi_1}(B - \Delta_E, \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_E}}} & \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))
\end{array}$$

ce qui implique d'après la remarque de la proposition 1.5 que l'on obtient en passant à la limite pour les E avec $\Delta_E \subseteq \Delta$ le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\pi_1}(B - \Delta', \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_{\Delta'}}}} & \text{Gal}(\Omega_{\Delta'}/\mathcal{M}(B)) \\
\downarrow \widehat{r_{\Delta}^{\Delta'}} & \searrow \widehat{r_{\Delta_E}^{\Delta'}} & \downarrow \rho_{\Omega_{\Delta'}}^{\Omega_{\Delta'}} \\
& \widehat{\pi_1}(B - \Delta_E, \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_E}}} \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)) \\
& \swarrow \widehat{r_{\Delta_E}^{\Delta_E}} & \downarrow \rho_E^{\Omega_{\Delta}} \\
\widehat{\pi_1}(B - \Delta, \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_{\Delta}}}} & \text{Gal}(\Omega_{\Delta}/\mathcal{M}(B)).
\end{array}$$

En particulier, on a $\rho_{\Omega_{\Delta'}}^{\Omega_{\Delta'}} \circ \widehat{\theta_{\xi_{\Delta'}}} = \widehat{\theta_{\xi_{\Delta}}} \circ \widehat{r_{\Delta}^{\Delta'}}$, donc on obtient un morphisme entre les système projectifs $((\widehat{\pi_1}(B - \Delta, \beta))_{\Delta \in \mathcal{D}(B)}, (\widehat{r_{\Delta}^{\Delta'}})_{\Delta \subseteq \Delta'})$ et $((\text{Gal}(\Omega_{\Delta}/\mathcal{M}(B)))_{\Delta \in \mathcal{D}(B)}, (\rho_{\Omega_{\Delta}}^{\Omega_{\Delta'}})_{\Delta \subseteq \Delta'})$ indexés par le même ensemble d'indices.

Pour arriver à identifier $\varprojlim_{\Delta} \widehat{\pi_1}(B - \Delta, \beta)$ à $\text{Gal}(\Omega/\mathcal{M}(B)) = \varprojlim_E \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$, il faut unifier les deux ensembles d'indices $\mathcal{D}(B)$ et $\mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$. Rappelons que l'on a déjà démontré l'identification

$$\widehat{\theta_x}: \widehat{\pi_1}(B - \Delta, b) \rightarrow \text{Gal}(\Omega_{\Delta}/\mathcal{M}(B))$$

pour $x \in \varprojlim_E X_E(b)$. On veut donc :

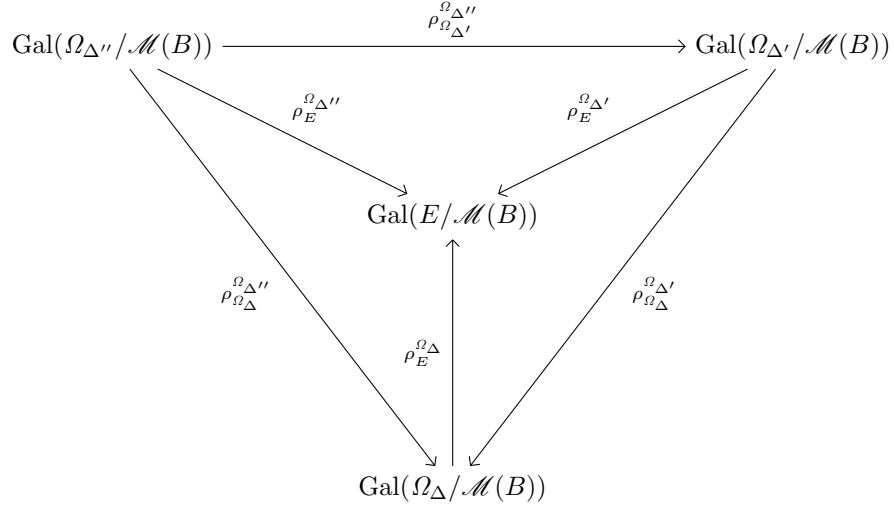
- écrire $\text{Gal}(\Omega/\mathcal{M}(B)) = \varprojlim_{\Delta} \text{Gal}(\Omega_{\Delta}/\mathcal{M}(B))$;
- établir l'identification entre $\widehat{\pi_1}(B - \Delta, \beta)$ et $\text{Gal}(\Omega_{\Delta}/\mathcal{M}(B))$ pour β un germe de chemin.

En effet :

- Soit $\Delta \subseteq \Delta' \in \mathcal{D}(B)$. Alors pour tous $E, F \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$ tels que $\Delta_E \subseteq \Delta_F \subseteq \Delta \subseteq \Delta'$, on a par la définition de la limite projective le diagramme commutatif suivant :

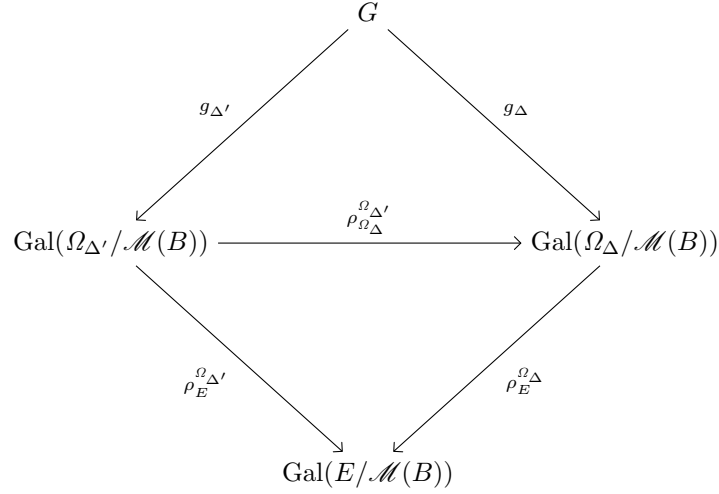
$$\begin{array}{ccc}
& \text{Gal}(\Omega_{\Delta'}/\mathcal{M}(B)) & \\
\rho_{F^{\Omega_{\Delta'}}} \downarrow & \searrow \rho_{E^{\Omega_{\Delta'}}} & \\
& \text{Gal}(F/\mathcal{M}(B)) & \xrightarrow{\rho_E^F} \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B)).
\end{array}$$

Par la proposition 1.5, on obtient un morphisme $\rho_{\Omega_{\Delta'}}^{\Omega_{\Delta'}}: \text{Gal}(\Omega_{\Delta'}/\mathcal{M}(B)) \rightarrow \text{Gal}(\Omega_{\Delta}/\mathcal{M}(B))$ tel que pour tout E avec $\Delta_E \subseteq \Delta$, $\rho_E^{\Omega_{\Delta'}} = \rho_{\Omega_{\Delta'}}^{\Omega_{\Delta'}} \circ \rho_E^{\Omega_{\Delta}}$; de même façon, on peut obtenir pour chaque $\Delta \in \mathcal{D}(B)$ un morphisme $\rho_{\Omega_{\Delta}}: \text{Gal}(\Omega/\mathcal{M}(B)) \rightarrow \text{Gal}(\Omega_{\Delta}/\mathcal{M}(B))$ tel que pour tout E avec $\Delta_E \subseteq \Delta$ on a que $\rho_E = \rho_E^{\Omega_{\Delta}} \circ \rho_{\Omega_{\Delta}}$. De plus, pour $\Delta \subseteq \Delta' \subseteq \Delta'' \in \mathcal{D}(B)$, en prenant un $E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$ tel que $\Delta_E \subseteq \Delta$ on a le diagramme commutatif suivant :

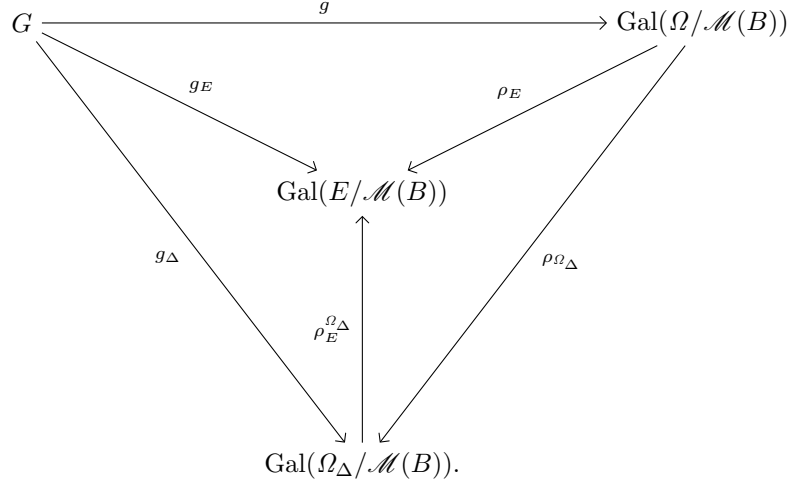


d'où $\rho_{\Omega_\Delta}^{\Omega_{\Delta''}} = \rho_{\Omega_\Delta}^{\Omega_{\Delta'}} \circ \rho_{\Omega_{\Delta'}}^{\Omega_{\Delta''}}$; analogiquement on a $\rho_{\Omega_\Delta} = \rho_{\Omega_\Delta}^{\Omega_{\Delta'}} \circ \rho_{\Omega_{\Delta'}}^{\Omega_\Delta}$. Donc on obtient un système projectif $((\text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B)))_{\Delta \in \mathcal{D}(B)}, (\rho_{\Omega_\Delta}^{\Omega_{\Delta'}})_{\Delta \subseteq \Delta'})$. Montrons que $\text{Gal}(\Omega/\mathcal{M}(B))$ est la limite de ce système en montrant que celui-là vérifie la propriété universelle :

Soit G un groupe muni des morphismes $g_\Delta : G \rightarrow \text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B))$ tels que pour $\Delta \subseteq \Delta' \in \mathcal{D}(B)$, on a que $g_\Delta = \rho_{\Omega_\Delta}^{\Omega_{\Delta'}} \circ g_{\Delta'}$. Construisons pour tout $E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$ un morphisme $g_E : G \rightarrow \text{Gal}(E/\mathcal{M}(B))$ en choisissant $\Delta \in \mathcal{D}(B)$ et en posant $g_E = \rho_E^{\Omega_\Delta} \circ g_\Delta$. Grâce au diagramme commutatif ci-dessous :



pour tous $\Delta \subseteq \Delta' \in \mathcal{D}(B)$, on a que les g_E ne dépendent pas du choix de Δ . De plus, pour $E \subseteq F \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$, choisissant $\Delta \in \mathcal{D}(B)$ telle que $\Delta_E \subseteq \Delta_F \subseteq \Delta$ on a que $\rho_E^{\Omega_\Delta} = \rho_F^{\Omega_\Delta} \circ \rho_E^F$, d'où $g_E = \rho_E^F \circ g_F$. Alors il existe un unique morphisme de groupes $g : G \rightarrow \text{Gal}(\Omega/\mathcal{M}(B))$ tel que pour tout $E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$, $g_E = \rho_E \circ g$, d'où pour tout $\Delta \in \mathcal{D}(B)$, en choisissant un E tel que $\Delta_E \subseteq \Delta$ on a le diagramme commutatif ci-dessous :

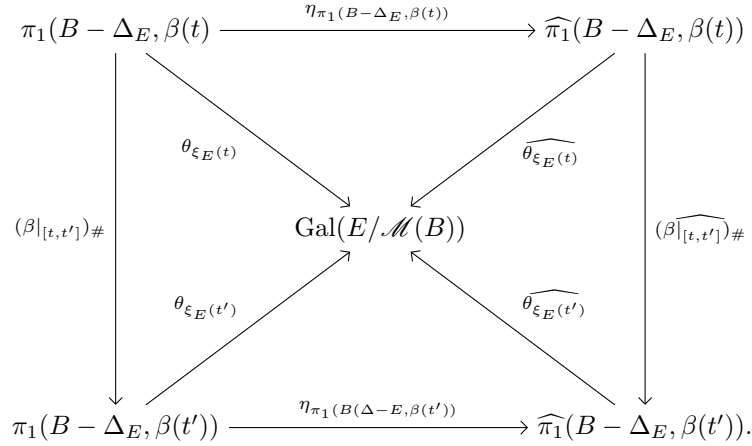


Donc il existe un unique g tel que pour tout $\Delta \in \mathcal{D}(B)$, $g_\Delta = \rho_\Delta \circ g_\Delta$. Ainsi

$$\text{Gal}(\Omega/\mathcal{M}(B)) = \varprojlim_{\Delta \in \mathcal{D}(B)} \text{Gal}(\Omega_\Delta/\mathcal{M}(B)).$$

- On a déjà montré dans la sous-section 3.3 que pour tout $t \in]0, c_\Delta[$, le morphisme $\widehat{\theta_{\xi_\Delta(t)}}$ est un isomorphisme ; en passant à la limite, par la proposition 1.5, $\varprojlim_{t \in]0, c_\Delta[} \widehat{\theta_{\xi_\Delta(t)}}$ est aussi un isomorphisme. Il reste donc à montrer que $\varprojlim_{t \in]0, c_\Delta[} \widehat{\theta_{\xi_\Delta(t)}}$ est égal à $\widehat{\theta_{\xi_\Delta}}$ la limite obtenu à partir des $\widehat{\theta_{\xi_E}}$ avec $\Delta_E \subseteq \Delta$.

Soit $\Delta \in \mathcal{D}(B)$ et soit $E \in \mathcal{G}(\Omega/\mathcal{M}(B))$. Pour $t \in]0, c_\Delta[\subseteq]0, c_{\Delta_E}[$, on a que $\xi_E(t)$ est un relèvement de $\beta(t)$ dans X_E et que $\xi_E(t)$ est l'image de $\xi_\Delta(t)$ du morphisme $\varprojlim_E X_E(\beta(t)) \rightarrow X_E(\beta(t))$. Donc par la proposition 4.5 on obtient le diagramme commutatif suivant :



En particulier, on a $\widehat{\theta_{\xi_E(t)}} = (\beta|_{[t, t']})_\# \circ \widehat{\theta_{\xi_E(t')}} ;$ par la functorialité des $\widehat{\theta_{\xi_E(t)}}$ par rapport à E . Donc on obtient en passant à la limite pour les E avec $\Delta_E \subseteq \Delta$ une égalité

$$\widehat{\theta_{\xi_\Delta(t)}} = (\beta|_{[t, t']})_\# \circ \widehat{\theta_{\xi_\Delta(t')}}$$

qui vérifie le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta(t)) & \xrightarrow{(\beta|_{[t, t']})^\# \cdot \Delta} & \widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta(t')) & & \\
\downarrow \scriptstyle (\iota_{\Delta_E}^\Delta)^{*, t} & \searrow \scriptstyle \widehat{\theta_{\xi_\Delta(t)}} & \swarrow \scriptstyle \widehat{\theta_{\xi_\Delta(t')}} & \downarrow \scriptstyle (\iota_{\Delta_E}^\Delta)^{*, t'} & \\
& \text{Gal}(\Omega_\Delta / \mathcal{M}(B)) & & & \\
& \downarrow \scriptstyle \rho_E^{\Omega_\Delta} & & & \\
& \text{Gal}(E / \mathcal{M}(B)) & & & \\
& \swarrow \scriptstyle \widehat{\theta_{\xi_E(t)}} & \nwarrow \scriptstyle \widehat{\theta_{\xi_E(t')}} & & \\
\widehat{\pi}_1(B - \Delta_E, \beta(t)) & \xrightarrow{(\beta|_{[t, t']})^\# \cdot \Delta_E} & \widehat{\pi}_1(B - \Delta_E, \beta(t')) & &
\end{array}$$

Donc par la proposition 1.5 on obtient un unique morphisme $h_{\xi, \Delta} = \varprojlim_{t \in]0; c_\Delta[} \widehat{\theta_{\xi_\Delta(t)}} : \widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta) \rightarrow \text{Gal}(\Omega_\Delta / \mathcal{M}(B))$ qui rend le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta) & \xrightarrow{h_{\xi, \Delta}} & \text{Gal}(\Omega_\Delta / \mathcal{M}(B)) \\
\downarrow \scriptstyle \widehat{r_{\Delta_E}^\Delta} & & \downarrow \scriptstyle \rho_E^{\Omega_\Delta} \\
\widehat{\pi}_1(B - \Delta_E, \beta) & \xrightarrow{\widehat{\theta_{\xi_E}}} & \text{Gal}(E / \mathcal{M}(B))
\end{array}$$

commutatif. Comme un tel morphisme est unique, on a que $h_{\xi, \Delta} = \widehat{\theta_{\xi_\Delta}}$. De plus, les $\widehat{\theta_{\xi_\Delta(t)}}$ étant des isomorphismes, $\widehat{\theta_{\xi_\Delta}}$ est un isomorphisme entre $\widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta)$ et $\text{Gal}(\Omega_\Delta / \mathcal{M}(B))$.

Finalement, on obtient, à partir des $(\widehat{\theta_{\xi_\Delta}})_{\Delta \in \mathcal{D}(B)}$ entre les systèmes projectifs $((\widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta))_{\Delta \in \mathcal{D}(B)}, (\widehat{r_{\Delta'}^\Delta})_{\Delta \subseteq \Delta'})$ et $((\text{Gal}(\Omega_\Delta / \mathcal{M}(B)))_{\Delta \in \mathcal{D}(B)}, (\rho_{\Omega_\Delta}^{\Omega_{\Delta'}})_{\Delta \subseteq \Delta'})$, un morphisme au niveau des limite

$$\widehat{\theta_\xi} : \varprojlim_{\Delta} \widehat{\pi}_1(B - \Delta, \beta) \rightarrow \text{Gal}(\Omega / \mathcal{M}(B)).$$

On a vu que les $\widehat{\theta_{\xi_\Delta}}$ sont tous des isomorphismes, donc par la proposition 1.5, $\widehat{\theta_\xi}$ est aussi un isomorphisme.

5 Calcul du groupe de Galois absolu de $\mathbb{C}(Z)$

On note Σ la surface de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, appelée souvent *sphère de Riemann*. Soient (U_0, z) et (U_∞, w) les deux cartes canoniques de Σ . Pour tout élément de $\mathbb{C}(Z)$ on peut obtenir une fonction méromorphe définie sur Σ , simplement en homogénéisant le numérateur et le dénominateur et en évaluant en les cordonnées homogènes de Σ .

Théorème 5.1. *Le corps des fonctions méromorphes sur Σ est isomorphe à $\mathbb{C}(Z)$.*

Démonstration. Soit f une fonction méromorphe définie sur Σ . Quitte à composer avec une application projective on peut supposer que f n'ait pas des pôles à l'infini. Pour tout $a \in U_0$ pôle de f , on appelle *partie polaire* $P_a f$ de f en a de la façon suivante. On peut mettre f de façon unique sur U_0 sous la forme $f(z) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{(z-a)^k} + h(z)$ avec h holomorphe au voisinage de a ; la partie polaire est alors le prolongement sur Σ de $\sum_{k=1}^N \frac{c_k}{(z-a)^k}$. On note que toute partie polaire est toujours une fraction rationnelle et que $f - P_a f$ n'a pas de pôle en a . Donc si $a_1, \dots, a_n$ sont les pôles de f , la fonction $h := f - \sum_{k=1}^n P_{a_k} f$ est holomorphe sur Σ , surface compacte, donc c'est constante. On obtient le résultat voulu. $\square$

Pour tout $\Delta \subseteq \mathbb{C}$, posons $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{\infty\} \subseteq \Sigma$. Les $\bar{\Delta}$ ainsi obtenus forment une système cofinal dans les parties finies de Σ . On a donc

$$\text{Gal}(\Omega, \mathbb{C}(Z)) = \text{Gal}(\Omega, \mathcal{M}(\Sigma)) \simeq \varprojlim \widehat{\pi}_1(\Sigma - \bar{\Delta}, \beta) = \varprojlim \widehat{\pi}_1(\mathbb{C} - \Delta, \beta),$$

où β est une application continue injective de $[0, 1]$ vers $\mathbb{C}$.

On peut supposer que l'image de β ne rencontre chaque droite réelle de $\mathbb{C}$ qu'en un nombre fini de points.

Lemme 5.2. *Soit β un chemin de $\mathbb{C}$ qui ne rencontre chaque droite réelle de $\mathbb{C}$ qu'en un nombre fini de points. Alors le groupe $\varprojlim \widehat{\pi}_1(\mathbb{C} - \Delta, \beta)$ est isomorphe au groupe $\hat{L}(\mathbb{C})$ dans la catégorie des groupes profinis.*

Démonstration. Pour $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ fini, le groupe $\pi_1(\mathbb{C} - \Delta, \beta)$ est isomorphe au groupe libre $L(\Delta)$. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que pour tous $a_1, a_2 \in \Delta$, avec $a_1 \neq a_2$, les points b, a_1, a_2 ne sont pas alignés. Définissons, pour tout $a \in \Delta$, la classe $\gamma_{b,a} \in \pi_1(\mathbb{C} - \Delta, b)$ de la façon suivante. Soit $\epsilon := \frac{1}{2} \min_{a' \in \Delta - \{a\}} |a - a'|$, alors $\gamma_{b,a}$ est la classe d'un lacet qui va de b vers a en droite ligne, s'arrête à la distance ϵ de a , décrit un cercle de rayon ϵ autour de a et revient à b en droite ligne. Les $(\gamma_{b,a})_{a \in \Delta}$ sont un ensemble de générateurs de $\pi_1(\mathbb{C} - \Delta, b)$.

Définissons maintenant pour tout Δ une base $(\gamma_{\beta,a})_{a \in \Delta}$ de $\pi_1(\mathbb{C} - \Delta, \beta)$. Vue l'hypothèse faite sur β , il existe $c' \leq c_\Delta$ non nul tel que $\beta([0, c'])$ ne rencontre aucune droite joignant deux points de Δ . Notons c'_Δ le plus grand des c' . L'élément $\chi_t(\gamma_{\beta(t),a})$ est indépendant du choix de t pourvu que t appartienne à $]0, c'_\Delta[$, notons le $\gamma_{\beta,a}$. Pour $\Delta' \supseteq \Delta$, l'homomorphisme $r_{\Delta'}^{\Delta} : \pi_1(\mathbb{C} - \Delta, \beta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \Delta', \beta)$ envoie $[\gamma_{\beta,a}] \in \pi_1(\mathbb{C} - \Delta, \beta)$ vers $[\gamma_{\beta,a}] \in \pi_1(\mathbb{C} - \Delta', \beta)$ si $a \in \Delta$ et en e si $a \notin \Delta$. Donc les isomorphismes $\alpha_\Delta : L(\Delta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \Delta, \beta)$ définis par la base $(\gamma_{\beta,a})_{a \in \Delta}$ induisent un isomorphisme $\hat{\alpha} : \hat{L}(\mathbb{C}) \rightarrow \varprojlim \widehat{\pi}_1(\mathbb{C} - \Delta, \beta)$. $\square$

Comme conséquence on obtient :

Théorème 5.3. *Le groupe de Galois $\text{Gal}(\Omega/\mathbb{C}(Z))$ est isomorphe au groupe $\hat{L}(\mathbb{C})$ dans la catégorie des groupes profinis.*

On obtient comme conséquence aussi la solution du problème inverse de Galois sur le corps $\mathbb{C}(Z)$.

Théorème 5.4. *Tout groupe fini est isomorphe au groupe de Galois d'une extension galoisienne finie de $\mathbb{C}(Z)$.*

Références

- [1] Regine et Adrien Douady, *Algèbre et Théories galosiennes*, Cassini, Paris, 2005
- [2] Tamás Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge, 2009