

UNIVERSITÉ PARIS SUD

Faculté des Sciences d'Orsay

Département de Mathématiques

M1 Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Projet TER

présenté par

Marco D'ADDEZIO

Juanyong WANG

Théorème de séparation des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte

dirigé par

Jean-Benoît BOST



M1 Mathématiques Fondamentales et Appliquées
Département d'Enseignement de Mathématiques, Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91405 Orsay CEDEX

Table des matières

1	Résultats d'analyse	3
1.1	Rappels sur les espaces vectoriels normés	3
1.2	Le théorème de compacité de Riesz	7
1.3	L'inégalité de Poincaré-Wirtinger	8
1.4	Un critère d'holomorphic	9
1.4.1	Première démonstration	9
1.4.2	Deuxième démonstration	9
2	Espaces de Sobolev de formes différentielles	12
2.1	La structure complexe de X	12
2.2	L'espace E^1	14
2.3	Les espaces E_ω^0 et E_ω^2	16
2.4	Démonstration du théorème clé	18
3	Dualité et théorème de finitude	21
3.1	Dualité entre H et Ω	21
3.2	Démonstrations du théorème de finitude	24
3.2.1	Première démonstration	24
3.2.2	Deuxième démonstration	25
3.2.3	Troisième démonstration	30
4	Construction de fonctions méromorphes	33
4.1	La séparation des points	33
4.2	La séparation des tangents	36
Annexe A	L'identification de H avec $H^1(X, \mathcal{O})$.	37

Introduction

Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1. Ces variétés complexes sont étudiées dans beaucoup des cadres différents en mathématiques. Par exemple on peut montrer que les surfaces de Riemann compactes sont des courbes algébriques. Pour arriver à cela il faut tout d'abord utiliser de l'analyse pour montrer l'existence de suffisamment de fonctions méromorphes. Dans le livre de Miranda [9], par exemple, toute la théorie algébrique des surfaces de Riemann compactes est présentée en supposant que les fonctions méromorphes séparent les points¹ et les tangents². On se propose dans ce texte de montrer ces deux propriétés pour toute surface de Riemann compacte.

On commence dans la section 1 en introduisant des outils d'analyse fonctionnelle. Dans la deuxième section on va étudier la structure complexe des surfaces de Riemann et on va construire des espaces de Sobolev de formes. On va aussi démontrer un théorème clé qu'on va utiliser dans la section 3 pour montrer une dualité entre un certain conoyau H et l'espace des 1-formes holomorphe d'une surface de Riemann. Ce conoyau est un espace important, on montre en annexe qu'il est isomorphe au premier groupe de cohomologie du faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphe sur la surface. Heuristiquement on peut le penser comme un « espace d'obstructions », dans ce cas les obstacles à recoller des fonctions méromorphes de façon holomorphe. En montrant que l'espace Ω des 1-formes holomorphes est de dimension finie on obtient que H aussi est de dimension finie.

On peut démontrer la finitude de la dimension de H de façons différentes. Par exemple, dans le livre de Claire Voisin [11] au Chapitre 5, on peut trouver la démonstration de la finitude de la dimension de tous les groupes de cohomologie d'une variété complexe compacte à valeur dans un fibré vectoriel holomorphe de dimension finie. La démonstration n'utilise pas la dualité mais plutôt la représentation des classes de cohomologie par des formes harmoniques.

Dans la dernière section, on va présenter finalement comment utiliser la finitude de la dimension de H pour construire des fonctions méromorphes. On va démontrer les deux théorèmes de séparation des points.

Pour un traitement des surfaces de Riemann non compactes et aussi pour le cas compact avec plus de généralité, le lecteur peut lire le livre de Guenot et Narasimhan [8]. Dans le chapitre 5 ils montrent qu'une surface de Riemann non compacte est une variété de Stein et donc en particulier les fonctions holomorphes séparent les points.

Notation

- Les espace paracompacts et compacts sont toujours supposés séparés.
- Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, avec X un espace topologique, $\mathcal{B}$ la famille des boréliens de X et μ une mesure quelconque sur $\mathcal{B}$ on note $L^2_\mu(X)$ ou simplement L^2_μ l'espace $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note λ la restriction de la mesure de Lebesgue aux boréliens de X . Dans ce cas on note $L^2(X)$ ou L^2 l'espace $L^2(X, \mathcal{B}, \lambda)$. On note $W^1(X)$ l'espace de Sobolev des fonctions dans $L^2(X)$ qui admettent des dérivées faibles dans $L^2(X)$.

1. i.e. pour toute couple de points distincts de la surface il y a une fonction méromorphe qui a une valeur différent sur les deux points.

2. i.e. pour tout point de la surface il y a une fonction méromorphe en admettant un pôle simple sur le point. On peut voir cette propriété comme la propriété de « séparation des points doubles ».

1 Résultats d'analyse

Dans cette section, on va démontrer quelques résultats remarquables d'analyse que l'on va utiliser dans les sections suivantes.

Tout d'abord on rappelle des propriétés du quotient des espaces vectoriels normés, dont l'on a besoin dans la démonstration du théorème clé 2.32 dans la section 2 et celle du théorème de la dualité 3.4 dans la section 3.

Ensuite on va démontrer le fameux théorème de Riesz qui établit l'équivalence pour des espaces vectoriels topologiques entre la finitude de la dimension et la compacité locale. On va l'utiliser pour déduire le théorème de finitude 3.5 de la proposition 3.7 dans la section 3.

Dans la troisième sous-section on va démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger qui nous permet de montrer que l'image d'un certain opérateur de cobord est fermé, à savoir le théorème 2.32 dans la section 2. Ce théorème clé sera une étape essentielle dans la démonstration du théorème de dualité 3.4 dans la section 3.

Finalement on fournit un critère d'holomorphicité, qui dit qu'une fonction L^2 annulée au sens de distributions par l'opérateur $\partial_{\bar{z}}$ coïncide presque partout avec une fonction holomorphe. C'est une proposition que l'on va utiliser plusieurs fois, par exemple, dans la première démonstration du théorème de finitude 3.5, i.e. la démonstration de la proposition 3.7 dans la section 3.

1.1 Rappels sur les espaces vectoriels normés

On note avec $\mathbb{F}$ le corps topologique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans cette sous-section, on va rappeler quelques notions sur les $\mathbb{F}$ -espaces vectoriels normés, à savoir, la notion d'espace vectoriel topologique quotient (par un sous-espace fermé), la notion de morphisme strict et celle d'espace vectoriel dual topologique.

Définition-Proposition 1.1. Soit V un espace vectoriel normé sur $\mathbb{F}$ et soit W un sous-espace vectoriel fermé de V . Alors l'espace vectoriel quotient V/W , muni de la norme définie par la formule ci-dessous :

$$\|\cdot\|_{V/W} : V/W \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \bar{u} = u + W \mapsto \inf_{v \in \bar{u}} \|v\|_V = \inf_{w \in W} \|u - w\|_V$$

est un espace normé, que l'on appelle l'espace vectoriel normé quotient de V par W .

Démonstration. Il faut vérifier que l'application $\|\cdot\|_{V/W}$ ainsi définie est une norme sur l'espace V/W :

Positivité Comme $\|\cdot\|_V$ est une norme sur V , alors pour tout $v \in V$, $\|v\|_V \geq 0$. On a donc nécessairement que pour tout $\bar{u} \in V/W$, $\|\bar{u}\|_{V/W} \geq 0$. Ainsi $\|\cdot\|_{V/W}$ est vraiment une application de V/W dans $\mathbb{R}_+$.

Séparation Si $\bar{u} \in V/W$ tel que $\|\bar{u}\|_{V/W} = 0$, alors

$$\inf_{w \in W} \|u - w\|_V = 0,$$

ce qui implique que $u \in \bar{W}$. Comme W est fermé, $u \in W$, i.e. $\bar{u} = 0$ est dans V/W .

Homogénéité Soit $\lambda \in \mathbb{F}$ et soit $\bar{u} \in V/W$, on a par définition que $\lambda \cdot \bar{u} = \overline{\lambda u}$. Si $\lambda = 0$, l'homogénéité est clairement vérifiée.

Si $\lambda \neq 0$, comme $\|\cdot\|_V$ est une norme, on a

$$\|\lambda \cdot \bar{u}\|_{V/W} = \inf_{v \in \overline{\lambda u}} \|v\|_V = \inf_{v \in \bar{u}} \|\lambda v\|_V = \inf_{v \in \bar{u}} |\lambda| \cdot \|v\|_V.$$

Comme $|\lambda|$ est un réel positif,

$$\|\lambda \cdot \bar{u}\|_{V/W} = |\lambda| \cdot \inf_{v \in \bar{u}} \|v\|_V = |\lambda| \cdot \|\bar{u}\|_{V/W}.$$

Inégalité triangulaire Soient $\bar{u}, \bar{u}' \in V/W$. Alors pour tout $v \in \bar{u} = u + W$ et pour tout $v' \in \bar{u}' = u' + W$, on a d'après l'inégalité triangulaire dans V :

$$\|v + v'\|_V \leq \|v\|_V + \|v'\|_V$$

Passant à la borne inférieure $\inf$ pour $v \in \bar{u}$ et $v' \in \bar{u}'$ et on obtient :

$$\inf_{v \in \bar{u}, v' \in \bar{u}'} \|v + v'\|_V \leq \inf_{v \in \bar{u}} \|v\|_V + \inf_{v' \in \bar{u}'} \|v'\|_V$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \inf_{v \in \bar{u}, v' \in \bar{u}'} \|v + v'\|_V &= \inf_{w, w' \in W} \|u - w + u' - w'\|_V = \inf_{w, w' \in W} \|(u + u') - (w + w')\|_V \\ &= \inf_{w \in W} \|(u + u') - w\|_V = \|\bar{u} + \bar{u}'\|_{V/W} \end{aligned}$$

Donc on a

$$\|\bar{u} + \bar{u}'\|_{V/W} \leq \inf_{v \in \bar{u}} \|v\|_V + \inf_{v' \in \bar{u}'} \|v'\|_V = \|u\|_{V/W} + \|u'\|_{V/W}$$

Finalement, on voit que l'application $\|\cdot\|_{V/W}$ ainsi définie est bien une norme sur l'espace vectoriel V/W . $\square$

On démontre maintenant deux propositions qui caractérisent les espaces vectoriels normés quotients définis ci-dessus. La première implique que l'espace vectoriel normé quotient que l'on vient de définir est effectivement un quotient dans la catégorie $\mathcal{N}$ où les objets sont des espaces vectoriels normés et les morphismes sont des applications linéaires non-expansives, à savoir qu'il vérifie une certaine propriété universelle; et la deuxième est un résultat sur la complétude des quotients vectoriels normés d'un espace de Banach par un sous-espace fermé.

Proposition 1.2. *Soit V un espace normé et soit W un sous-espace fermé de V . Alors l'espace V/W défini dans la définition 1.1 et la projection canonique $\pi : V \rightarrow V/W$, vérifient la propriété universelle des quotients dans la catégorie $\mathcal{N}$, à savoir que pour toute application linéaire non-expansive $f : V \rightarrow Z$ avec Z un espace vectoriel normé telle que f s'annule sur W , alors il existe une unique application linéaire non-expansive $\bar{f} : V/W \rightarrow Z$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$, i.e. le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ V/W & & \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. On note d'abord que π est effectivement une application linéaire non-expansive car pour tout $u \in V$, on a

$$\|\pi(u)\|_{V/W} = \|\bar{u}\|_{V/W} = \inf_{v \in \pi(u)} \|v\|_V \leq \|u\|_V.$$

On sait que des espaces vectoriels quotients vérifient la propriété universelle du quotient dans la catégorie des espaces vectoriels. Donc si on se donne une telle f comme ci-dessus, on obtient par la propriété universelle une unique application linéaire $\bar{f} : V/W \rightarrow Z$ qui fait commuter le diagramme.

Il reste donc à montrer que $\bar{f}$ est non-expansive. Comme f est non-expansive, pour tout $v \in V$,

$$\|f(v)\|_Z \leq \|v\|_V.$$

Alors pour tout $w \in W$, comme $f(w) = 0$, si on pose $\bar{v} := \pi(v)$,

$$\|\bar{f}(\bar{v})\|_Z = \|f(v - w)\|_Z \leq \|v - w\|_V,$$

d'où

$$\|\bar{f}(\bar{v})\|_Z \leq \inf_{w \in W} \|v - w\|_V = \|\bar{v}\|_{V/W}.$$

Comme π est surjective, $\bar{f}$ est non-expansive. $\square$

Proposition 1.3. *Si V un espace de Banach et W un sous-espace fermé de V , alors V/W est un espace de Banach; de plus, l'espace vectoriel normé quotient V/W est aussi un espace de Banach.*

Démonstration. Le sous-espace fermé W , muni de la norme induite par $\|\cdot\|_V$ est un espace de Banach normé ; il est complet car V est complet et W est fermé. D'où W est un espace de Banach.

Maintenant on va montrer que V/W est un espace de Banach. Par la proposition précédente, V/W est bien un espace normé, donc il suffit de montrer que V/W est complet. On prend une suite de Cauchy $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans V/W , il suffit de montrer que $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.³ En effet, comme $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, on peut prendre une sous-suite $(\bar{u}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait

$$\|\bar{u}_{n_k} - \bar{u}_{n_{k+1}}\|_{V/W} < \frac{1}{2^k}.$$

Choisissons $v_1 \in \bar{u}_{n_1} = u_{n_1} + W$, et on a par la définition de la norme d'espace vectoriel quotient que

$$\inf_{v \in \bar{u}_{n_2}} \|v_1 - v\|_V < \frac{1}{2}.$$

Donc on peut trouver $v_2 \in \bar{u}_{n_2}$, tel que $\|v_1 - v_2\|_V < 1/2$. On itère cette procédé : si l'on a déjà choisi $v_k \in \bar{u}_{n_k}$, on a

$$\inf_{v \in \bar{u}_{n_{k+1}}} \|v_k - v\|_V < \frac{1}{2^k}.$$

on peut donc trouver un $v_{k+1} \in \bar{u}_{n_{k+1}}$, tel que

$$\|v_k - v_{k+1}\|_V < \frac{1}{2^k}.$$

Alors $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy dans V , donc elle converge. Soit u la limite de $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans V , alors pour

$$\|\bar{u}_{n_{k+1}} - \bar{u}\|_{V/W} = \inf_{v \in \bar{u}, v' \in \bar{u}_{n_{k+1}}} \|v' - v\|_V \leq \|v_{k+1} - u\|_V < \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k}.$$

d'où la suite $(\bar{u}_{n_k})$ converge vers $\bar{u}$ dans V/W . Donc la suite de Cauchy $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans V/W , ce qui implique que V/W est complet. $\square$

Considérons le cas où V est un espace de Hilbert, on a un résultat analogue :

Proposition 1.4. *Soit V un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)_V$ et soit W un sous-espace vectoriel fermé de V . Alors W est un espace de Hilbert et de plus, V/W est aussi un espace de Hilbert.*

Démonstration. C'est claire que l'espace vectoriel fermé W muni du produit scalaire $((\cdot | \cdot)_V)|_W$ est un espace de Hilbert. Il reste à montrer que le produit scalaire passe au quotient. Comme V est un espace de Hilbert⁴, on dispose d'une décomposition orthogonale

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Soit π_1 (π_2 resp.) la projection (orthogonale) vers W ($W^\perp$ resp.). Alors pour tout $u \in V$, $\pi_2(u)$ ne dépend que de la classe de u dans V/W . Donc l'application suivante :

$$\begin{aligned} (\cdot | \cdot)_{V/W} : V/W \times V/W &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\bar{u}_1, \bar{u}_2) &\mapsto (\pi_2(u_1) | \pi_2(u_2))_V \end{aligned}$$

est bien définie, ce qui donne le produit scalaire de V/W . De plus c'est bien une forme sesquilinéaire et elle coïncide avec la norme que l'on vient de définir dans la définition 1.1 : pour tout $v \in \bar{u} = u + W$, on a

$$(\bar{u} | \bar{u})_{V/W} = (\pi_2(v) | \pi_2(v))_V = \|\pi_2(v)\|_V^2 \leq \|\pi_1(u)\|_V^2 + \|\pi_2(v)\|_V^2 = \|v\|_V^2.$$

Donc

$$(\bar{u} | \bar{u})_{V/W} \leq \inf_{v \in \bar{u}} \|v\|_V^2.$$

Mais $\pi_1(v) \in W$, donc $\pi_2(v) \in \bar{u}$, d'où

$$(\bar{u} | \bar{u})_{V/W} = \inf_{v \in \bar{u}} \|v\|_V^2 = \|\bar{u}\|_{V/W}^2.$$

$\square$

3. En général, dans un espace métrique, une suite de Cauchy converge si et seulement si elle admet une sous-suite extraite convergente.

4. Ce résultat est aussi vrai pour le cas où V est un espace préhilbertien et W un sous-espace vectoriel fermé.

Définition 1.5. Soient V et W deux $\mathbb{F}$ -espaces normés, alors on dit qu'une application linéaire continue φ de V vers W est un *morphisme strict* si l'isomorphisme algébrique $V/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ est un homéomorphisme.

Maintenant on va donner une caractérisation des morphismes stricts entre des espaces de Banach.

Théorème 1.6. Soient V et W des espaces de Banach sur $\mathbb{F}$, soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire continue. Alors T est strict si et seulement si $\text{Im}(T)$ est un sous-espace fermé de W .

Démonstration. L'application linéaire T induit un isomorphisme algébrique (ou linéaire) $\bar{T} : V/\text{Ker}(T) \rightarrow \text{Im}(T)$, c'est-à-dire, $\bar{T}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Comme $\text{Ker}(T)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach V , alors par la proposition 1.3, $\text{Ker}(T)$ et $V/\text{Ker}(T)$ sont tous des espaces de Banach.

Si T est strict, alors $\text{Im}(T)$ est homéomorphe à $V/\text{Ker}(T)$, ce dernier étant un espace de Banach, $\text{Im}(T)$ l'est aussi. Comme $\text{Im}(T)$ est un sous-espace complet, donc $\text{Im}(T)$ est un sous-espace fermé de W . Réciproquement, si $\text{Im}(T)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach W , alors $\text{Im}(T)$ lui-même est aussi un espace de Banach, donc par le théorème de l'application ouverte, l'application linéaire continue bijective $\bar{T}$ est ouverte, donc est un homéomorphisme, i.e. T est strict. $\square$

Définition-Proposition 1.7. Soit V un espace normé sur $\mathbb{F}$ on appelle *dual topologique*, et on note V^* , le $\mathbb{F}$ -espace vectoriel des formes linéaires continues de V vers $\mathbb{F}$ muni de la norme suivante : si $\nu \in V^*$ alors

$$\|\nu\|_{V^*} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} |\nu(x)|.$$

Démonstration. On montre que $\|\cdot\|_{V^*}$ défini est une norme sur l'espace V^* :

Positivité, séparation et homogénéité Les trois propriétés sont des conséquences directes de la positivité, séparation et homogénéité de la norme $\|\cdot\|_V$ et de le module de $\mathbb{F}$.

Inégalité triangulaire Soient $\nu_1, \nu_2 \in V^*$, pour tout $x \in V$, $|\nu_1(x) + \nu_2(x)| \leq |\nu_1(x)| + |\nu_2(x)|$, donc

$$\|\nu_1 + \nu_2\|_{V^*} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} |\nu_1(x) + \nu_2(x)| \leq \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} |\nu_1(x)| + |\nu_2(x)| \leq \|\nu_1\|_{V^*} + \|\nu_2\|_{V^*}.$$

$\square$

Proposition 1.8. Si V est un espace normé V^* , le dual topologique est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $\{\nu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans V^* . Pour tout $x \in V \setminus \{0\}$ et $i, j \in \mathbb{N}$ on a $|(\nu_i - \nu_j)(x)| \leq \|x\| \|\nu_i - \nu_j\|_{V^*}$ par définition de la norme du dual. Cela implique que la suite $\{\nu_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en $\mathbb{F}$, donc convergent. Soit $\nu^* : V \rightarrow \mathbb{F}$ l'application $\mathbb{F}$ -linéaire telle que pour tout $x \in V$, $\nu^*(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \nu_i(x)$. Pour tout i et pour tout x différent de 0, on a $|(\nu^* - \nu_i)(x)| = \limsup_{j \rightarrow \infty} |(\nu_j - \nu_i)(x)| \leq \|x\| \limsup_{j \rightarrow \infty} \|\nu_j - \nu_i\|_{V^*}$. D'où on obtient soit

$$\sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} |\nu^*(x)| \leq \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} |(\nu^* - \nu_1)(x)| + \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} |\nu_1(x)| \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \|\nu_j - \nu_1\|_{V^*} + \|\nu_1\|_{V^*}$$

et donc que $\nu^* \in V^*$, soit $\nu_i \rightarrow \nu^*$ parce que

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \|\nu^* - \nu_i\|_{V^*} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \limsup_{j \rightarrow \infty} \|\nu_j - \nu_i\|_{V^*} = 0.$$

$\square$

Théorème 1.9. Si V est un espace de Hilbert, alors V^* , le dual topologique, est aussi un espace de Hilbert. De plus l'application $\mathbb{R}$ -linéaire $\Theta : V \rightarrow V^*$ qui à $x \in V$ associe $(\cdot|x)_V \in V^*$ est une isométrie surjective. Dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, on a que Θ est $\mathbb{C}$ -antilinéaire et $(\Theta(y)|\Theta(x))_{V^*} = (x|y)_V$.

Démonstration. L'application Θ est $\mathbb{R}$ -linéaire par la définition d'espace de Hilbert. Soit $x \in V$, alors pour tout $y \in V$, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwartz que $|(y|x)_V| \leq \|y\|_V \|x\|_V$; de plus, $|(x|x)_V| = \|x\|_V^2$, d'où $\|\Theta(x)\|_{V^*} = \|(\cdot|x)\|_{V^*} = \|x\|_V$. Le morphisme Θ est aussi surjectif par le théorème de représentation de Riesz. En particulier, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, pour tous $\nu_1, \nu_2 \in V^*$, $(\nu_1, \nu_2)_{V^*} := (\theta^{-1}(\nu_1), \theta^{-1}(\nu_2))_V$ est un produit scalaire tel que $(\nu_1, \nu_1)_{V^*} = \|\nu_1\|_V^2$.

Finalement si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, l'application Θ est $\mathbb{C}$ -antilinéaire par la définition de norme hilbertienne sur $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, pour tous $\nu_1, \nu_2 \in V^*$, $(\nu_1, \nu_2)_{V^*} := (\theta^{-1}(\nu_2), \theta^{-1}(\nu_1))_V$ est un produit scalaire hermitien tel que $(\nu_1, \nu_1)_{V^*} = \|\nu_1\|_V^2$. $\square$

1.2 Le théorème de compacité de Riesz

Ici on va discuter du théorème de Riesz qui établit l'équivalence entre la finitude de dimension, un aspect algébrique, et la compacité locale, un aspect topologique. De plus, ce théorème s'applique sur tout espace vectoriel topologique séparé.

On va donner des différentes démonstrations pour des résultats de différentes généralités.

Théorème 1.10 (Théorème de Riesz pour les espaces préhilbertiens). *Soit V un espace préhilbertien, alors V est localement compact si et seulement si V est de dimension finie.*

Démonstration. Si V est un espace préhilbertien de dimension finie, alors les parties compactes de V sont des parties fermées et bornées, d'où la compacité locale.

Soit V un espace préhilbertien localement compact. Supposons que V est de dimension infinie, alors on peut trouver une suite infinie $\mathcal{B}$ de vecteurs linéairement indépendants. Par la procédé de Gram-Schmidt, on peut supposer que les vecteurs dans $\mathcal{B}$ sont orthogonaux entre eux et de norme 1. Soit $\bar{B}$ la boule unité fermée de V , alors on a clairement que $\mathcal{B} \subset \bar{B}$. Comme V est localement compact, $\bar{B}$ est compacte, alors il existe une sous-suite convergente de $\mathcal{B}$, disons $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En conséquence, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans V . Mais quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, on a

$$\|v_m - v_n\|^2 = (v_m - v_n | v_m - v_n) = \|v_m\|^2 + \|v_n\|^2 - (v_m | v_n) - (v_n | v_m) = 2$$

car $(v_n | v_m) = (v_m | v_n) = 0$, donc v_n ne peut pas être une suite de Cauchy dans V . Contradiction. $\square$

Théorème 1.11 (Théorème de Riesz pour les espaces vectoriels normés). *Soit V un espace vectoriel normé, alors V est localement compact si et seulement si V est de dimension finie.*

Démonstration. La suffisance déduit du théorème de Heine-Borel et du fait que sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, toute norme équivaut à la norme euclidienne.

Démontrons que la condition est nécessaire. Supposons que $(V, \|\cdot\|)$ est localement compact. Soit U un voisinage ouvert de 0 dans V , tel que $\bar{U}$ est compact. Maintenant on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \frac{1}{2^n} U$$

Alors on a $U_0 = U$, $U_1 = U/2$. On prend $\mathcal{U} = \{v + U_1\}_{v \in \bar{U}}$ un recouvrement de $\bar{U}$, comme $\bar{U}$ compact, $\mathcal{U}$ admet un sous-recouvrement fini $\mathcal{U}_0 = \{v_i + U_1\}_{i=1}^n$. Soit $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ le sous-espace vectoriel de V engendré par les v_i , alors W est de dimension finie ($\dim W \leq n$). On veut montrer que $V = W$. Pour cela, comme U est un voisinage de 0, il suffit de montrer que $U \subset W$. En effet, comme U est un voisinage ouvert de 0, il existe une boule centrée en 0 de rayon r contenue dans U . Quelque soit $v \neq 0$ dans V , on a $v_0 = rv/\|v\| \in B(0, r) \subset U$, donc si on peut montrer que $U \subset W$, on a $v_0 \in W$; mais W est un espace vectoriel, donc $v \in W$, ce qui implique que $V = W$.

Enfin on montre que $U \subset W$. Par la construction de W , on a $U = U_0 \subset W + U_1$; en divisant par 2, on obtient alors

$$U/2 = U_1 \subset W/2 + U_1/2 = W + U_2$$

En itérant le procédé, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U \subset W + U_n$, donc $U \subset \bar{W}$. Mais W est un sous-espace de dimension finie, donc sur W la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme euclidienne et donc W est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|$. On sait qu'un sous-espace complet d'un espace vectoriel normé est fermé, d'où W est fermé, i.e. $W = \bar{W}$. Donc $U \subset W$. $\square$

L'équivalence entre locale compacité et la finitude de dimension est vraie aussi pour les espaces de Fréchet, ce qui constitue un lemme fondamental dans la démonstration du lemme de Schwartz :

Théorème 1.12 (L. Schwartz). *Soient E et F deux espaces de Fréchet, f et $g : E \rightarrow F$ deux applications linéaires continues telles que $f + g$ soit surjective et f compacte. Alors $\text{Im } g$ est fermée et de codimension finie dans F .*

Ce théorème de Schwartz est un point clé dans la démonstration du théorème de finitude de Cartan-Serre qui est une version générale du théorème de finitude que l'on va démontrer dans la section 3.

1.3 L'inégalité de Poincaré-Wirtinger

L'inégalité de Poincaré classique est une inégalité sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ borné dans une direction dans l'espace $W_0^{1,p}(U)$ (la fermeture des fonctions $C_0^\infty(U)$). Cette inégalité permet de borner la norme L^p d'une fonction avec la norme L^p de son gradient au sens des distributions. Il y a plusieurs façons d'obtenir des estimations semblables, qui dépendent de la géométrie du domaine de définition. Un exemple est l'inégalité de Poincaré-Wirtinger sur une boule de $\mathbb{R}^2$ qu'on va présenter dans cette section. On va noter $B_R := B(0, R)$ et I l'intervalle $[0, 1]$.

Théorème 1.13 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). *Si f est une fonction dans $W^1(B_R)$ à moyenne nulle, alors*

$$\|f\|_{L^2(B_R)} \leq 8R \|\nabla f\|_{L^2(B_R)}.$$

Démonstration. Comme les normes de l'inégalité sont continue par rapport à la norme de $W^1(B_R)$ et par la densité des fonctions $C^1(B_R)$ dans l'espace $W^1(B_R)$, c'est suffisant montrer l'inégalité avec $f \in C^1(B_R)$. Par le théorème du calcul intégral, pour tous $x, y \in B_R$ on a

$$f(x) - f(y) = \int_I \nabla f(tx + (1-t)y)(x-y) dt.$$

En intégrant par rapport à y , par l'hypothèse sur la moyenne de f , on obtient

$$f(x) = \lambda(B_R)^{-1} \iint_{B_R \times I} \nabla f(tx + (1-t)y)(x-y) dt dy.$$

Donc

$$|f(x)|^2 = \lambda(B_R)^{-2} \left| \iint_{B_R \times I} \nabla f(tx + (1-t)y)(x-y) dt dy \right|^2$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$|f(x)|^2 \leq \lambda(B_R)^{-1} \iint_{B_R \times I} |\nabla f(tx + (1-t)y)|^2 |x-y|^2 dt dy.$$

En intégrant par rapport à x ,

$$\int_{B_R} |f(x)|^2 dx \leq \lambda(B_R)^{-1} \iiint_{B_R^2 \times I} |\nabla f(tx + (1-t)y)|^2 |x-y|^2 dt dy dx.$$

L'intégral de droite est invariant par rapport à la transformation $x \mapsto y$ et $t \mapsto (1-t)$, alors

$$\iiint_{B_R^2 \times I} |\nabla f(tx + (1-t)y)|^2 |x-y|^2 dt dy dx = 2 \iiint_{B_R^2 \times [1/2, 1]} |\nabla f(tx + (1-t)y)|^2 |x-y|^2 dt dy dx.$$

Si on pose $z := tx + (1-t)y$, comme $|x-y|^2 = t^{-2}|z-y|^2$ et le Jacobien est t^{-2} , alors on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |f(x)|^2 dx &\leq 2\lambda(B_R)^{-1} \iiint_A |\nabla f(z)|^2 |z-y|^2 t^{-4} dt dy dz \leq \\ &\leq 2\lambda(B_R)^{-1} \iiint_{B_R^2 \times [1/2, 1]} |\nabla f(z)|^2 |z-y|^2 t^{-4} dt dy dz. \end{aligned}$$

Où A est une certaine partie de $B_R^2 \times [1/2, 1]$. Comme $|z-y| \leq 2R$ et $t^{-4} \leq 2^4$, on obtient

$$\int_{B_R} |f(x)|^2 dx \leq (8R)^2 \int_{B_R} |\nabla f(z)|^2 dz.$$

□

1.4 Un critère d'holomorphicité

On considère $\mathbb{C}$, identifié avec le plan réel $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathbb{D}$ le disque ouvert du plan complexe de rayon 1.

Une fonction holomorphe est définie comme une fonction C^1 qui est solution de l'équation de Cauchy-Riemann. Étonnamment on a qu'une distribution quelconque qui est solution de l'équation de Cauchy-Riemann est une fonction holomorphe. On va bien voir cette propriété en donnant deux démonstrations différentes. La première avec des rudiments de la théorie des opérateurs elliptique et la théorie des distributions; l'autre par approximation de h et donc en utilisant quelque résultat sur le produit de convolution.

Théorème 1.14. *Soit h une fonction à carré sommable sur $\mathbb{D}$, telle que pour toute fonction f de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{D}$, on a*

$$\int_{\mathbb{D}} h(x) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x) dx = 0.$$

Alors h coïncide presque partout avec une fonction holomorphe.

1.4.1 Première démonstration

L'opérateur $\partial_{\bar{z}}$ est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants qui a une solution fondamentale C^∞ hors l'origine, donc c'est hypoelliptique. Cela veut dire que les solutions au sens faible de $\partial_{\bar{z}}T = 0$ sont des fonctions C^∞ . En particulier, comme la dérivée par rapport à $\bar{z}$ est nulle ces sont des fonctions holomorphes. On voit en détail les passages.

Définition 1.15. On dit que P est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{R}^n$ si

$$P = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \partial^\alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, les a_α sont dans $\mathbb{C}$ et ∂^α sont les composées de dérivations au sens des distributions. On dit qu'une distribution E définie sur $\mathbb{R}^n$ est une solution fondamentale de P si $PE = \delta_0$.

On va admettre le résultat suivant.

Théorème 1.16. *Soit P un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{R}^n$. Si P a une solution fondamentale E telle que la restriction à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une fonction C^∞ , alors pour toute partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $F \in C^\infty(\Omega)$, les solutions de l'équation $PT = F$ dans $D'(\Omega)$ sont dans $C^\infty(\Omega)$.*

Dans notre cas on peut montrer grâce au théorème de Stokes le fait suivant.

Lemme 1.17. *La fonction $1/\pi z$ est une solution fondamentale de $\partial_{\bar{z}}$.*

Grâce cela on peut démontrer finalement le théorème 1.14.

Démonstration 1 du théorème 1.14. On peut récrire l'hypothèse comme $\partial_{\bar{z}}T_h = 0$, où T_h est la distribution régulière associée à h . Par le lemme 1.17, on peut appliquer le théorème 1.16, en remplaçant $P = \partial_{\bar{z}}$, $T = T_h$ et $F = 0$. Ce qu'on obtient c'est que T_h est $C^\infty(\mathbb{D})$ et donc il existe une fonction $\tilde{h}$ dans $C^\infty(\mathbb{D})$, égale à h presque partout et telle que $\partial_{\bar{z}}\tilde{h} = 0$ au sens fort. Donc $\tilde{h}$ est holomorphe parce que la composante antilinéaire de la différentielle est nulle. $\square$

1.4.2 Deuxième démonstration

Une démonstration sans le langage des distributions est aussi possible sans trop de complications. La raison est que les fonctions holomorphes ont une propriété très particulière par rapport à la norme L^2 et cela rend plutôt facile obtenir une démonstration par un argument d'approximation.

On fait tout d'abord un bref rappel sur l'approximation des fonctions L^2 par convolution avec une approximation de l'unité.

Définition 1.18. Soit $\rho_1(x)$ une fonction de $\mathbb{R}^d$ à moyenne 1 positive à support compact, soient $\rho_n(x) := n^{-d}\rho_1(nx)$ pour $n > 1$. Alors on appelle $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.

On admet le lemme suivant sur les approximations de l'unité.

Théorème 1.19. Soit $g \in L^2_\mu(\mathbb{D})$, où μ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, qui admet une densité continue et bornée sur $\mathbb{D}$. Soit $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité de $\mathbb{R}^2$. Soient $g_n := g * \rho_n$ pour tout n . Alors les fonctions g_n sont C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et les $g_n|_{\mathbb{D}}$ convergent à g dans $L^2_\mu(\mathbb{D})$. En plus si $\partial_i g \in L^2_\mu(\mathbb{D})$ alors $\partial_i g_n|_{\mathbb{D}}$ convergent dans $L^2_\mu(\mathbb{D})$ à $\partial_i g$. Finalement si g est à support compact dans $\mathbb{D}$, alors, pour n assez grand, $\text{supp}(g_n) \subseteq \mathbb{D}$.

On va maintenant montrer qu'une suite de fonctions holomorphes qui converge en norme L^2 converge vers une fonction holomorphe. On commence par un théorème très classique d'analyse complexe.

Théorème 1.20. Si une suite de fonctions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ holomorphes définies sur $\mathbb{D}$ converge à f uniformément sur tous les compacts, alors f est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

Démonstration. On sait que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Ainsi f est continue sur tout compact de $\mathbb{D}$, donc est continue sur $\mathbb{D}$. Par le théorème de Morera, pour montrer que f est holomorphe c'est suffisent montrer que $\int_\gamma f(z)dz$ est une forme fermée. Pour avoir cela il suffit de prouver que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout γ bord d'un rectangle contenu dans $\mathbb{D}$. Comme f est la limite uniforme de la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, alors sur le bord de tout rectangle on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_n \int_\gamma f_n(z)dz = 0.$$

□

Ce théorème a comme conséquence le lemme suivant.

Lemme 1.21. Pour toute partie compacte de $\mathbb{D}$ il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que pour toute g fonction holomorphe dans $L^2(\mathbb{D})$ on ait $\|g\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \|g\|_{L^2(\mathbb{D})}$. En plus les classes représentées par une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ constituent une partie fermée de $L^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Si K est une partie compacte de $\mathbb{D}$, on a que $r := \text{dist}(K, \mathbb{D}^c) > 0$. Soit $z \in K$, et soit $B := B(z, r) \subseteq \mathbb{D}$ une boule ouvert. Soit g une fonction holomorphe dans $L^2(\mathbb{D})$. Par la propriété de la moyenne et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|g(z)| = \left| \lambda(B)^{-1} \int_B g(x)dx \right| \leq \lambda(B)^{-1} \int_B |g(x)|dx \leq \lambda(B)^{-1/2} \left(\int_B |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Alors $\|g\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \|g\|_{L^2(\mathbb{D})}$, où $C_K := \lambda(B)^{-1/2}$. En conséquence si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes qui converge à f en norme L^2 , alors par l'inégalité la suite converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. Par le théorème 1.20, cela implique que f est holomorphe. □

On peut finalement donner la deuxième démonstration du théorème 1.14.

Démonstration 2 du théorème 1.14. Par abuse de notation on appelle encore h la fonction définie sur tout $\mathbb{R}^2$ qui coïncide avec h sur $\mathbb{D}$ et vaut 0 dehors $\mathbb{D}$. Soit $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité dans $\mathbb{D}$ et soient $h_n := h * \rho_n$. Maintenant il faut traduire l'hypothèse sur h par des hypothèses sur toutes h_n . Pour faire cela il faut utiliser deux identités.

Lemme 1.22. Pour toute fonction f de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{D}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} (h * \rho_n)(x) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} h(x) \left(\check{\rho}_n * \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)(x) dx \quad (1.4.1)$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\left(\check{\rho}_n * \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)(x) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\check{\rho}_n * f)(x). \quad (1.4.2)$$

Démonstration du lemme. La première identité est obtenu par changement de variables, en utilisant le théorème de Fubini. On peut appliquer ce théorème comme ρ_n et f sont C^∞ à support compact et h est L^1 . Ainsi si on pose $x' := x - y$, $y' = -y$ et $\check{\rho}_n(y) := \rho_n(-y)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (h * \rho_n) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (h(x-y) \rho_n(y)) dy \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} h(x') \check{\rho}_n(y') \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x' - y') dy' dx' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x') \left(\check{\rho}_n * \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)(x') dx'. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe d'intégral. On peut l'utiliser, comme f et $\check{\rho}_n$ sont C^∞ à support compact. $\square$

Soit B_R la boule fermée centrée en 0, de rayon R . On veut montrer que h est holomorphe sur tout $\mathring{B}_R$ pour $R < 1$; soit f une fonction C^∞ à support dans $\mathring{B}_R$. Comme $\{\check{\rho}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, le théorème 1.19 dit que pour tout n , la fonction $\check{\rho}_n * f$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. En plus, comme f est à support compact, pour $n > N_R$, avec $N_R \in \mathbb{N}$ qui dépend seulement de R , $\text{supp}(\check{\rho}_n * f) \subseteq \mathbb{D}$. Ainsi par les deux identités du lemme et par l'hypothèse, pour $n > N_R$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} h_n(x) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} (h * \rho_n)(x) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} h(x) \left(\check{\rho}_n * \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\check{\rho}_n * f)(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Par le théorème 1.19, pour tout n , h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et par hypothèse f est à support compact, donc par le théorème de Stokes,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial h_n}{\partial \bar{z}}(x) f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^2} h_n(x) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x) dx.$$

On note que on peut écrire aussi que pour $n > N_R$,

$$\int_{B_R} \frac{\partial(h_n|_{B_R})}{\partial \bar{z}}(x) f(x) dx = 0.$$

Comme les fonctions C^∞ à support compact dans B_R sont denses dans $L^2(B_R)$, alors $\partial_{\bar{z}} h_n|_{\mathring{B}_R} = 0$ et donc $h_n|_{\mathring{B}_R}$ est holomorphe pour $n > N_R$. Par le théorème 1.19, $h_n \xrightarrow{L^2} h$, donc on a aussi $h_n|_{B_R} \xrightarrow{L^2(B_R)} h|_{B_R}$. Par le théorème 1.20, comme pour $n > N_R$ les $h_n|_{\mathring{B}_R}$ sont holomorphes, $h|_{\mathring{B}_R}$ est holomorphe. $\square$

2 Espaces de Sobolev de formes différentielles

Soit X une surface de Riemann, on veut construire des espaces de formes différentielles complexes. On peut pas utiliser simplement les espaces de formes C^∞ parce que pour démontrer la dualité il faut utiliser des espaces de Banach. Dans cette section on commence en rappelant la définition de fibré vectoriel complexe sur X et de formes différentielles complexes. On définit l'opérateur de Hodge sur les 1-formes différentielles et on voit quelque propriété basilaire. Ensuite on construit des espaces de Sobolev E_ω^0 , E^1 et E_ω^2 , où ω est une certaine forme volume et on montre des résultats sur l'opérateur différentiel d . On va montrer à la fin que grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, $d :: E_\omega^0 \rightarrow E^1$ est un morphisme strict. C'est un point clé pour la démonstration de la finitude de la dimension de H .

2.1 La structure complexe de X

On va étudier maintenant les surfaces de Riemann. On commence en donnant la définition.

Définition 2.1. On appelle *surface de Riemann* une variété complexe de dimension 1. En particulier on suppose qu'elle est séparé et à base dénombrable.

Remarque. L'ensemble $\emptyset$ muni de l'atlas $\{\emptyset\}$ est en particulier une surface de Riemann.

Comme X est aussi une variété différentielle, elle admet un fibré tangent réel $T_{X,\mathbb{R}}$. Si (φ_j, U_j) sont des cartes de X alors on peut identifier pour tout x l'espace tangent en x , $T_{X,x}$ à $\mathbb{C}$, grâce aux différentielles. Alors on a des endomorphismes

$$J_j : T_{U_j,\mathbb{R}} \rightarrow T_{U_j,\mathbb{R}}$$

induits par les endomorphismes $id \times \cdot i$ de $U_j \times \mathbb{C}$.

Lemme 2.2. Si X est une surface de Riemann il existe un endomorphisme global J de $T_{X,\mathbb{R}}$ telle que les restrictions en $T_{U_j,\mathbb{R}}$ sont J_j , en plus $J^2 = -Id_{T_{X,\mathbb{R}}}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que les morphismes J_j sont le même sur l'intersection. Si $U_{j_1} \cap U_{j_2}$ est non vide alors la fonction $\varphi_{j_2} \circ \varphi_{j_1}^{-1} : \varphi_{j_1}(U_{j_1} \cap U_{j_2}) \rightarrow \varphi_{j_2}(U_{j_1} \cap U_{j_2})$ est holomorphe. Donc la différentielle est $\mathbb{C}$ -linéaire et cela veut dire qu'elle commute avec la multiplication par i . Comme $J_{j_1}^2 = -Id_{T_{U_{j_1},\mathbb{R}}}$ pour tout j , alors $J^2 = -Id_{T_{X,\mathbb{R}}}$. $\square$

Si $T_{X,\mathbb{C}} := T_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$, on peut étendre J à $T_{X,\mathbb{C}}$ par linéarité. En plus pour tout U_j on prend comme base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $T_{U_j,\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

On note que J est $\mathbb{C}$ -linéaire et il envoie $\frac{\partial}{\partial x}$ vers $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ vers $-\frac{\partial}{\partial x}$ et encore $\frac{\partial}{\partial z}$ vers $i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ vers $-i \frac{\partial}{\partial z}$.

On commence à donner la définition d'une k -forme différentielle (complexe).

Définition 2.3. On appelle k -forme différentielle (continue) ou k -forme (continue) une section (continue) du fibré vectoriel $\bigwedge^k T_{X,\mathbb{C}}^*$. On dit qu'une 1-forme est de type $(1,0)$ si sur toute carte elle annule $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et de l'autre côté on dit que elle est de type $(0,1)$ si elle annule $\frac{\partial}{\partial z}$. Pour toute carte de X on va noter dz et $d\bar{z}$ la base duale de $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, en particulier $dz = dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$.

Remarque. Une forme est de type $(1,0)$ si et seulement si pour toute carte on peut l'écrire dans la forme $f dz$. De l'autre côté une forme est de type $(0,1)$ si et seulement si pour toute carte on peut l'écrire dans la forme $f d\bar{z}$.

Lemme 2.4. Une 1-forme qui est à la fois de type $(1,0)$ et de type $(0,1)$ est la forme 0. En plus toute 1-forme est de façon unique la somme d'une forme de type $(1,0)$ et d'une forme de type $(0,1)$.

Démonstration. Une 1-forme qui annule à la fois $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ dans toutes les cartes fais 0 si évaluée sur tout élément du fibré tangent, donc elle est la forme 0.

Soit α une 1-forme, et soient

$$\alpha^{1,0} := \frac{1}{2} (\alpha - i\alpha J)$$

$$\alpha^{0,1} := \frac{1}{2}(\alpha + i\alpha J).$$

On a clairement $\alpha = \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}$ et si on applique ces deux formes à $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ pour tout point de X on voit par calcul qu'elles sont de type $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement. Si $\beta^{1,0}$ et $\beta^{0,1}$ sont des autres forme de type $(1,0)$ et $(0,1)$ telles que $\alpha = \beta^{1,0} + \beta^{0,1}$, alors $\alpha^{1,0} - \beta^{1,0} = \alpha^{0,1} - \beta^{0,1}$ et $\alpha^{1,0} - \beta^{1,0}$ doit être au même temps de type $(1,0)$ et de type $(0,1)$, donc c'est 0. $\square$

Maintenant on veut définir l'opérateur de Hodge. On commence en définissant

$$\tau : T_{X,\mathbb{R}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow T_{X,\mathbb{R}}^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

par conjugaison complexe à droite, on va noter cette application avec une barre. On va utiliser les identités suivantes : $dzJ = idz$, $d\bar{z}J = -id\bar{z}$ et $d\bar{z} = d\bar{z}$, $d\bar{z} = dz$.

Définition 2.5. Si α est une 1-forme on définit $*\alpha := -\overline{\alpha J}$. On appelle cet opérateur, *l'opérateur de Hodge*.

Lemme 2.6. *L'opérateur de Hodge est $\mathbb{C}$ -antilinéaire et il envoie dz vers $id\bar{z}$ et $d\bar{z}$ vers $-idz$. Donc il envoie formes de type $(1,0)$ en forme de type $(0,1)$ et vice versa. En plus $*^2 = -Id$.*

Démonstration. Pour toute $\alpha \in E^1$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $*(\lambda\alpha) = -\overline{\lambda\alpha J} = \overline{\lambda}(*\alpha)$. On calcul maintenant $*dz = -d\bar{z}J = -idz = id\bar{z}$ et $*d\bar{z} = -d\bar{z}J = id\bar{z} = -idz$. Encore on a pour toute $\alpha \in E^1$

$$*^2\alpha = -\tau \circ (*\alpha) \circ J = -\tau \circ (-\tau \circ \alpha \circ J) \circ J = \tau^2 \circ \alpha \circ J^2.$$

Comme $\tau^2 = Id$ et $J^2 = -Id$, on a $*^2\alpha = -\alpha$, ainsi $*^2 = -Id$. $\square$

Définition 2.7. On dit qu'une 2-forme η est *réelle* (resp. *positive*, resp. *strictement positive*) si pour tout $x \in X$, $\eta_x\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ est réelle (resp. positif, resp. strictement positif).

Remarque. Toute 2-forme positive (resp. *strictement positive*) a intégral sur X positive (resp. *strictement positive*).

Lemme 2.8. *Pour toutes α et β 1-formes, on a que $\alpha \wedge *\beta = \overline{\beta \wedge *\alpha}$ et en plus $\alpha \wedge *\alpha$ est réelle positive et strictement positive aux points où α ne s'annule pas.*

Démonstration. On note que pour tout α et β 1-formes et pour tout point $x \in X$,

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge *\beta)_x\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(* \beta)_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - \alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(* \beta)_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \\ &= \alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{\beta}_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{\beta}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \\ &= \alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{\beta_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} + \alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\overline{\beta_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}. \end{aligned}$$

Grâce à ce calcul, si on change α avec β dans la formule on obtient que $\alpha \wedge *\beta$ et $\overline{\beta \wedge *\alpha}$ sont égaux sur $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ et donc, comme elles sont des 2-formes sur un espace de dimension deux, elles sont égaux. Si on pose $\beta = \alpha$ dans la formule par contre on obtient

$$(\alpha \wedge *\alpha)_x\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left|\alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right|^2 + \left|\alpha_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|^2$$

et ainsi le résultat final. $\square$

On va faire un petit calcul.

Lemme 2.9. *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f et g sont deux fonctions complexes définies sur U , alors $(fdz + gd\bar{z}) \wedge *(fdz + gd\bar{z}) = 2(|f|^2 + |g|^2)(dx \wedge dy)$.*

Démonstration. On a déjà vu que $*dz = id\bar{z}$ et $*d\bar{z} = -idz$, alors

$$(fdz + gd\bar{z}) \wedge *(fdz + gd\bar{z}) = (fdz + gd\bar{z}) \wedge i(\bar{f}d\bar{z} - \bar{g}dz) = i(|f|^2 + |g|^2) (dz \wedge d\bar{z}).$$

Mais $dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2i (dx \wedge dy)$, alors on trouve exactement le résultat cherché. $\square$

Une classe très importante de 1-formes est la classe des formes différentielles holomorphes.

Définition 2.10. On appelle *forme holomorphe* sur une surface de Riemann X toute forme différentielle α de type $(1, 0)$ sur X telle que sur toute carte analytique (U, ψ) de X , $\alpha|_U$ admet en coordonnées locales z associées à ψ une expression locale $f(z)dz$ où f est une fonction holomorphe sur $\psi(U)$.

On admet le théorème suivant.

Théorème 2.11. *Les formes holomorphes sont localement exactes. En plus si l'intégral de la forme sur tout lacet de X est égal à zéro alors la forme est exacte.*

On montre maintenant :

Proposition 2.12. *Si α est holomorphe et $df = \alpha$ alors f est holomorphe sur X .*

On peut le vérifier localement : pour tout $x \in X$, on veut montrer que f est holomorphe en x . Soit (U, ϕ, z) de X centrée en x telle que $\phi(U) = \mathbb{D}$, alors par la commutativité de la dérivée extérieure et le tiré en arrière on a :

$$(\phi^{-1})^*(\alpha|_U) = (\phi^{-1})^*(df|_U) = d((\phi^{-1})^*f|_U) = d(f|_U \circ \phi^{-1}) = \frac{\partial f_\phi}{\partial z} dz + \frac{\partial f_\phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

où $f_\phi = f|_U \circ \phi^{-1}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{D}$. Mais α est une forme holomorphe sur X , donc $(\phi^{-1})^*(\alpha|_U)$ est une forme différentielle holomorphe sur $\mathbb{D}$, ce qui s'écrit $h(z)dz$ avec h une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, d'où on a que

$$\frac{\partial f_\phi}{\partial z} = h$$

est holomorphe et que

$$\frac{\partial f_\phi}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Par le théorème 1.14, f_ϕ coïncide presque partout avec une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, mais f_ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ car f l'est, donc f_ϕ est holomorphe sur $\mathbb{D}$. Ainsi f est holomorphe en x pour tout $x \in X$. Donc f est une fonction holomorphe globale sur X .

2.2 L'espace E^1

On va maintenant à étudier différents espaces de formes. On suppose à partir de maintenant que X soit compacte.

Un théorème qu'on va utiliser beaucoup c'est le suivant.

Théorème 2.13. *Si X est un espace topologique et μ est une mesure sur les boréliens, alors $L_\mu^2(X)$ est complet.*

Définition 2.14. On dit qu'une 1-forme est *mesurable* si toute expression locale est de la forme $f dz + g d\bar{z}$ où f et g sont mesurables. On note $\tilde{E}^1(X)$ l'ensemble de 1-formes mesurables α de X telles que

$$\int_X \alpha \wedge *\alpha < \infty.$$

On note pour toutes $\alpha, \beta \in \tilde{E}^1$

$$(\alpha|\beta)_{\tilde{E}^1} := \int_X \alpha \wedge *\beta$$

et $\|\alpha\|_{\tilde{E}^1} := (\alpha|\alpha)_{\tilde{E}^1}^{1/2}$. Maintenant on indique $E^1(X)$ l'espace $\tilde{E}^1(X)$ modulo les formes $\alpha \in \tilde{E}^1(X)$ telles que $\|\alpha\|_{\tilde{E}^1} = 0$. On note pour toutes $[\alpha], [\beta] \in E^1$, $([\alpha]|[\beta])_{E^1} := (\alpha|\beta)_{\tilde{E}^1}$ et $\|[\alpha]\|_{E^1} := \|\alpha\|_{\tilde{E}^1}$. On va confondre un élément de E^1 , donc une classe, avec un représentant quelconque.

Lemme 2.15. *L'espace $(E^1, (|)_{E^1})$ est un espace préhilbertien complexe.*

Démonstration. La fonction $(\cdot)_{E^1}$ est une expression hermitienne, en fait si $\alpha, \beta, \gamma \in E^1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda\alpha + \beta, \gamma)_{E^1} = \int_X (\lambda\alpha + \beta) \wedge \gamma = \lambda \int_X \alpha \wedge \gamma + \int_X \beta \wedge \gamma = \lambda(\alpha, \gamma)_{E^1} + (\beta, \gamma)_{E^1}.$$

En plus par le lemme 2.8

$$(\beta, \alpha)_{E^1} = \int_X \beta \wedge * \alpha = \overline{\int_X \alpha \wedge * \beta} = \overline{(\alpha, \beta)_{E^1}}.$$

La forme hermitienne $(\cdot)_{E^1}$ est un produit scalaire par le lemme 2.8, comme si $\alpha \in E^1$, $(\alpha, \alpha)_{E^1} = \int_X \alpha \wedge * \alpha \geq 0$ et c'est 0 si et seulement si $\alpha = 0$. $\square$

Lemme 2.16. *L'espace $(E^1, (\cdot)_{E^1})$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E^1$ une suite de Cauchy et soit $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ un recouvrement des ouverts de cartes. Soit encore $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq m}$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$. Soient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq m$, $\alpha_n^{(i)} := \phi_i \alpha_n$. On peut écrire $\alpha_n^{(i)} = f_n^{(i)} dz + g_n^{(i)} d\bar{z}$ avec $f_n^{(i)}, g_n^{(i)}$ des fonctions sur U_i . Les espaces $L^2(U_i)$ sont complets par le théorème 2.13. Par le lemme 2.9, pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ on a que

$$\|\alpha_{n_1}^{(i)} - \alpha_{n_2}^{(i)}\|_{E^1}^2 = 2 \left(\|f_{n_1}^{(i)} - f_{n_2}^{(i)}\|_{L^2}^2 + \|g_{n_1}^{(i)} - g_{n_2}^{(i)}\|_{L^2}^2 \right). \quad (2.2.1)$$

Alors pour tout i les suites $\{f_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{g_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy. Par complétude, $\{f_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{g_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent en norme L^2 à des fonctions dans $L^2(U_i)$, qu'on appelle $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$. Encore par l'identité 2.2.1 cela veut dire que si $\alpha^{(i)} := f^{(i)} dz + g^{(i)} d\bar{z}$, alors $\alpha_n^{(i)} \mapsto \alpha^{(i)}$ dans E^1 . Comme $\alpha_n = \sum_{i=1}^m \alpha_n^{(i)}$, si $\alpha := \sum_{i=1}^m \alpha^{(i)}$ alors $\alpha_n \mapsto \alpha$ dans E^1 . $\square$

Lemme 2.17. *L'opérateur de Hodge $*$: $E^1 \rightarrow E^1$ est une isométrie.*

Démonstration. Soit $\alpha \in E^1$, alors

$$\|*\alpha\|_{E^1}^2 = (*\alpha | *\alpha) = \int_X *\alpha \wedge *^2\alpha = - \int_X *\alpha \wedge \alpha = \int_X \alpha \wedge *\alpha = (\alpha | \alpha) = \|\alpha\|_{E^1}^2$$

donc $\|*\alpha\| = \|\alpha\|$, du coup $*$ est une isométrie. $\square$

Lemme 2.18. *L'espace $C^\infty(X, T_{X, \mathbb{C}}^*)$ est dense dans $E^1(X)$.*

Démonstration. Soit $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ un recouvrement des ouverts de cartes avec images $\mathbb{D}$ et soit $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq m}$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$. Soit $\alpha \in E^1$ et soient $\alpha_i := \phi_i \alpha$, alors dans toute U_i on peut écrire α_i comme $f^{(i)} dz + g^{(i)} d\bar{z}$, avec $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$ dans $L^2(\mathbb{D})$. Par le théorème 1.19 pour tout i ils existent $\{f_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{g_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ fonctions C^∞ à support dans U_i qui convergent à $f^{(i)}$ et $g^{(i)}$ respectivement en norme L^2 . Par le lemme 2.9 les 1-formes $\alpha_n^{(i)} := f_n^{(i)} dz + g_n^{(i)} d\bar{z}$ convergent pour tout i vers $\alpha^{(i)}$ dans $E^1(X)$. En plus les $\alpha_n^{(i)}$ sont des formes dans $C^\infty(X, T_{X, \mathbb{C}}^*)$ par construction, alors si on prend pour tout n , $\alpha_n := \sum_{i=1}^m \alpha_n^{(i)}$ on a $\alpha_n \in C^\infty(X, T_{X, \mathbb{C}}^*)$ et $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge à α dans $E^1(X)$. $\square$

Définition 2.19. On note $E^{1,0}(X)$ et $E^{0,1}(X)$ ou simplement $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ les sous-espaces de formes de type $(1,0)$ et $(0,1)$ de E^1 .

Proposition 2.20. *Les espaces $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ sont sous-espaces fermés de E^1 , orthogonaux entre eux et $E^1 = E^{1,0} \oplus E^{0,1}$.*

Démonstration. Soit $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de 1-formes de type $(1,0)$ qui converge dans E^1 vers α . Pour toute carte on peut écrire $\alpha_n = f_n dz$, alors par le lemme 2.9 α est localement de la forme $f dz$. Cela implique que α est une forme de type $(1,0)$. Par symétrie on peut faire le même raisonnement pour une suite dans $E^{0,1}$, donc les deux espaces sont fermés.

Pour l'orthogonalité il faut montrer que pour toute $\alpha \in E^{1,0}$ et $\beta \in E^{0,1}$, $(\alpha | \beta)_{E^1} = 0$. On a que $*\beta$ est de type $(1,0)$, donc $\alpha \wedge *\beta = 0$, cela implique que α et β sont orthogonaux.

La décomposition d'espaces vectoriels $E^1 = E^{1,0} \oplus E^{0,1}$ est une conséquence du lemme 2.4. $\square$

Maintenant on va définir une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E^1 à l'aide de laquelle on obtient des dualités qu'on va utiliser dans la section 3 :

Définition-Proposition 2.21. Pour toutes $\alpha, \beta \in E^1$, on pose

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_X \alpha \wedge \beta.$$

La fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^1 \times E^1 \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme $\mathbb{C}$ -bilinéaire alterné continue. En plus

$$\langle \alpha, \beta \rangle = -(\alpha | * \beta)_{E^1}.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.6, on a :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (\alpha | - * \beta)_{E^1} = -(\alpha | * \beta)_{E^1}.$$

Comme premières conséquences de l'identité on a que par le lemme 2.15 la forme est $\mathbb{C}$ -bilinéaire et que $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ par l'orthogonalité entre α et $*\alpha$. En plus, comme dans le lemme 2.15 on a montré que $(\cdot | \cdot)_{E^1}$ est un produit scalaire, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| = |(\alpha | * \beta)_{E^1}| \leq \|\alpha\|_{E^1} \cdot \|* \beta\|_{E^1} = \|\alpha\|_{E^1} \cdot \|\beta\|_{E^1}$$

ce qui implique que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire continue sur E^1 . $\square$

On utilise cette forme bilinéaire pour montrer une dualité entre $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$.

Proposition 2.22. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un isomorphisme entre $E^{1,0}$ et le dual de $E^{0,1}$.

Démonstration. Soit $\phi : E^{1,0} \rightarrow (E^{0,1})^*$, qui à α associe $\alpha^* := \langle \alpha, \cdot \rangle$. L'application ϕ est bien définie car la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue. De plus, on montre que $\|\alpha\|_{E^1} = \|\alpha^*\|_{(E^1)^*}$, pour tout $\alpha \in E^{1,0}$. En effet, pour tout $\alpha \in E^{1,0}$ et $\beta \in E^{0,1}$, on a $\alpha^*(\beta) = |\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\|_{E^1} \cdot \|\beta\|_{E^1}$ donc $\|\alpha^*\|_{(E^1)^*} \leq \|\alpha\|_{E^1}$; en posant $\beta = *\alpha \in E^{0,1}$ on a $\alpha^*(\beta) = (\alpha | \alpha) = \|\alpha\|^2$, donc $\|\alpha\|_{E^1} = \|\alpha^*\|_{(E^1)^*}$, d'où ϕ est une isométrie. En particulier ϕ est continue injective.

L'application ϕ est surjective : $E^{0,1}$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire $(\cdot | \cdot)_{E^1}$, soit $\Theta : E^{0,1} \rightarrow (E^{0,1})^*$ le morphisme canonique du théorème 1.9. Pour tout $\nu \in (E^{0,1})^*$ et pour tout $\gamma \in E^{0,1}$, on a

$$(\gamma | \Theta^{-1}(\nu)) = \langle \gamma, *(\Theta^{-1}(\nu)) \rangle = -\langle *(\Theta^{-1}(\nu)), \gamma \rangle = \langle - *(\Theta^{-1}(\nu)), \gamma \rangle$$

donc si on pose $\alpha_\nu = - *(\Theta^{-1}(\nu)) \in E^{1,0}$ on a $\phi(\alpha_\nu) = \nu$, donc ϕ est surjective. $\square$

2.3 Les espaces E_ω^0 et E_ω^2

On va définir l'espace E_ω^0 .

Définition 2.23. On dit qu'une 2-forme est une *forme volume* si elle est continue et positive.

Les surfaces de Riemann sont orientables, donc il existe toujours au moins une forme volume. Soit ω une forme volume de X , on appelle μ_ω la mesure sur le boréliens de X induite et $L_\omega^2(X)$ ou L_ω^2 l'espace $L_{\mu_\omega}^2(X)$.

Définition 2.24. Si $f \in L_\omega^2$ a dérivées mesurables presque partout, on note df la forme définie localement par $\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$. On note $d'f$ et $d''f$ les parties de type $(1,0)$ et $(0,1)$ de df .

On note $E_\omega^0(X)$ ou simplement E_ω^0 , le sous-ensemble de L_ω^2 de fonctions $f \in L_\omega^2$ à dérivées mesurables presque partout telles que $df \in E^1$. Pour tout $f, g \in E_\omega^0$, on note $(f|g)_{E_\omega^0} := (f, g)_{L_\omega^2} + (df, dg)_{E^1}$.

Lemme 2.25. L'espace $(E_\omega^0, (f|g)_{E_\omega^0})$ est un espace de Hilbert complexe.

Démonstration. La fonction $(\cdot | \cdot)_{E_\omega^0}$ est un produit scalaire hermitien parce qu'il est la somme de produits scalaires hermitiens.

Il faut montrer que l'espace $(E_\omega^0, (\cdot | \cdot)_{E_\omega^0})$ est complet. Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E_\omega^0$ une suite de Cauchy, alors $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans L_ω^2 et $\{df_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E^1 . Par le théorème 2.13 la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E_\omega^0$ converge à une certaine f dans L_ω^2 . En particulier cette suite converge à f au sens des distributions, alors $\{df_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens faible à df parce que la dérivée est une application continue dans l'espace des distributions. Par le lemme 2.16 la suite $\{df_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E^1 vers une certaine 1-forme. Cette forme ne peut qu'être df , alors $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge à f dans E_ω^0 . $\square$

Lemme 2.26. *L'espace $C^\infty(X, \mathbb{C})$ est dense dans E_ω^0 .*

Démonstration. Soit $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ un recouvrement des ouverts de cartes avec images $\mathbb{D}$ et soit $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq m}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$. Soit $f \in E_\omega^0$ et soient $f^{(i)} := \phi_i f$ et $\omega_i := \phi_i \omega$. Les fonctions $f^{(i)}$ sont dans $E_{\omega_i}^0$ et elles sont à support compact. Par le théorème 1.19 on peut prendre pour tout i une suite $\{f_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions C^∞ à support dans U_i qui convergent à $f^{(i)}$ dans $E_{\omega_i}^0$. Si on prend pour tout n , $f_n := \sum_{i=1}^m f_n^{(i)}$ on a $f_n \in C^\infty(X, \mathbb{C})$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge à f dans E_ω^0 . $\square$

Lemme 2.27. *Les applications $d : E_\omega^0 \rightarrow E^1$, $d' : E_\omega^0 \rightarrow E^1$ et $d'' : E_\omega^0 \rightarrow E^1$ sont linéaires et continues.*

Démonstration. La linéarité est une conséquence de la linéarité de la dérivée. Pour la continuité c'est suffisant noter que par définition de la norme de E_ω^0 , $\|df\|_{E^1} \leq \|f\|_{E_\omega^0}$ et par orthogonalité entre $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ on a $\|d'f\|_{E^1} \leq \|df\|_{E^1}$ et $\|d''f\|_{E^1} \leq \|df\|_{E^1}$. $\square$

Lemme 2.28. *Si f est un élément de E_ω^0 , alors $\|d'f\|_{E^1} = \|d''f\|_{E^1}$. En particulier $\|df\|_{E^1} = 2\|d'f\|_{E^1} = 2\|d''f\|_{E^1}$.*

Démonstration. Si on suppose que f de classe C^2 , on peut montrer avec un calcul direct que $*d'f = id''\bar{f}$ et $*d''f = -id'\bar{f}$. On a que $d'f$ s'écrit localement $\frac{\partial f}{\partial z} dz$, alors $*d'f$ s'écrit localement comme $i\frac{\partial f}{\partial z} d\bar{z} = i\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ et c'est égale à l'écriture locale de $id''\bar{f}$. De même façon $*d''f$ s'écrit comme $-i\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dz = -i\frac{\partial f}{\partial z} dz$. Alors la forme exacte

$$d(f d\bar{f}) \stackrel{C^2}{=} df \wedge d\bar{f} = d'f \wedge d''\bar{f} + d''f \wedge d'\bar{f} = -i(d'f \wedge *d'f - d''f \wedge *d''f).$$

Par le théorème de Stokes, comme X est compacte sans bord, $\int_X d(f d\bar{f}) = 0$. Cela implique $d'f \wedge *d'f = d''f \wedge *d''f$ et alors $\|d'f\|_{E^1} = \|d''f\|_{E^1}$. Comme l'espace $C^2(X)$ est dense dans E^0 comme conséquence des lemmes 2.26 et 2.3, on arrive à montrer que $\|d'f\|_{E^1} = \|d''f\|_{E^1}$ pour tout $f \in E_\omega^0$. Comme $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ sont orthogonaux,

$$\|df\|_{E^1} = \|d'f\|_{E^1} + \|d''f\|_{E^1} = 2\|d'f\|_{E^1} = 2\|d''f\|_{E^1}$$

$\square$

Définition 2.29. On définit l'espace E_ω^2 comme le dual topologique de E_ω^0 .

Remarque. Par le théorème de représentation de Riesz, l'espace dual d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert donc en particulier E_ω^2 est un espace de Hilbert.

Lemme 2.30. *Soit $d : E^1 \rightarrow E_\omega^2$ l'application qui à $\alpha \in E^1$ associe la forme $d\alpha : E_\omega^0 \rightarrow \mathbb{C}$, qui à $f \in E_\omega^0$ associe $-\langle df, \alpha \rangle$. Alors $d : E^1 \rightarrow E_\omega^2$ est bien définie, linéaire et continue.*

Démonstration. On sait que $d : E_\omega^0 \rightarrow E^1$ est linéaire et continue et que la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue. Alors effectivement $d\alpha$ est une forme linéaire continue de E_ω^0 et $d : E^1 \rightarrow E_\omega^2$ est linéaire.

Il reste à montrer la continuité. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{E^1}$, on a $|d\alpha(f)| \leq \|df\|_{E^1} \|\alpha\|_{E^1} \leq \|f\|_{E_\omega^0} \|\alpha\|_{E^1}$. Alors $\|d\alpha\|_{E_\omega^2} \leq \|\alpha\|_{E^1}$ ce qui implique la continuité. $\square$

Lemme 2.31. *Notons $d'' : E^{1,0} \rightarrow E_\omega^2$ et $d' : E^{0,1} \rightarrow E_\omega^2$ les restrictions de $d : E^1 \rightarrow E_\omega^2$. Pour toute $f \in E^0$ et pour toute $\alpha \in E^{1,0}$, on a*

$$d''\alpha(f) = -\langle d''f, \alpha \rangle$$

et pour toute $\beta \in E^{0,1}$

$$d'\beta(f) = -\langle d'f, \beta \rangle.$$

Démonstration. Par orthogonalité de $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ si $\alpha \in E^{1,0}$, alors

$$\langle df, \alpha \rangle = \langle d'f, \alpha \rangle + \langle d''f, \alpha \rangle = \langle d''f, \alpha \rangle.$$

Si $\beta \in E^{0,1}$, alors

$$\langle df, \beta \rangle = \langle d'f, \beta \rangle + \langle d''f, \beta \rangle = \langle d'f, \beta \rangle.$$

$\square$

On a finalement construit le diagramme suivant dans la catégorie des espaces de Hilbert avec les fonctions linéaires continues :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E^{1,0} & & \\
 & \nearrow d' & \downarrow & \nwarrow d'' & \\
 E_\omega^0 & \xrightarrow{d} & E^1 & \xrightarrow{d} & E_\omega^2 \\
 & \searrow d'' & \uparrow & \nearrow d' & \\
 & & E^{0,1} & &
 \end{array}$$

2.4 Démonstration du théorème clé

On suppose maintenant que X soit connexe. Cela n'est pas une hypothèse forte parce qu'on peut toujours se ramener à travailler sur une certaine composante connexe de la surface. Le but de cette sous-section est de montrer le théorème suivant.

Théorème 2.32. *Soit X une surface de Riemann connexe et compacte et soit ω une forme volume de X . Les applications $d : E_\omega^0 \rightarrow E^1$ et $d'' : E_\omega^0 \rightarrow E^{0,1}$ ont comme noyau les fonctions constantes de X et les morphismes sont stricts.*

Pour montrer que le morphisme est strict il faut utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger de la section 1. Cependant on peut pas l'utiliser directement mais il faut l'adapter pour une surface de Riemann connexe et compacte.

On va admettre un fait général sur les espaces L^2 . Il n'est pas essentiel mais il aide à comprendre mieux les démonstrations suivantes.

Lemme 2.33. *Si X est un espace topologique et μ est une mesure sur le boréliens de X , alors pour toute $f \in L_\mu^2(X)$,*

$$\inf_{c \in \mathbb{C}} \|f - c\|_{L^2} = \|f - f^*\|_{L^2}$$

avec $f^* := \int_X f d\mu$.

Maintenant il faut démontrer une première généralisation de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger.

Lemme 2.34. *Soit $\eta := g dz \wedge d\bar{z}$, où g est une fonction continue et positive de $\bar{\mathbb{D}}$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour toute $f \in E_\eta^0(\mathbb{D})$, si on note $f^* := \int_{\mathbb{D}} f \eta$, alors $\|f - f^*\|_{E_\eta^0} \leq C \|df\|_{E^1}$.*

Démonstration. On commence en notant que $\|f - f^*\|_{E_\eta^0}^2 = \int_{\mathbb{D}} |f - f^*|^2 \eta + \|df\|_{E^1}^2$, donc il suffit de trouver C' tel que $\int_{\mathbb{D}} |f - f^*|^2 \eta \leq C' \|df\|_{E^1}^2$. Comme g est positive et continue sur un compact ils existent $m, M \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que

$$m \iint_{\mathbb{D}} |f - f^*|^2 dx dy \leq \int_{\mathbb{D}} |f - f^*|^2 \eta \leq M \iint_{\mathbb{D}} |f - f^*|^2 dx dy.$$

On a aussi que $\|df\|_{E^1} = 2 \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{D})}$, donc $f \in W^1(\mathbb{D})$ et alors par l'inégalité 1.13,

$$\int_{\mathbb{D}} |f - f^*|^2 \eta \leq 8M \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{D})}^2 = 4M \|df\|_{E^1}^2.$$

Si on pose $C := 4M + 1$ on a le résultat cherché. □

On démontre maintenant un lemme technique.

Lemme 2.35. *Soit A un espace topologique et soit μ une mesure sur les boréliens de A . Soient A_1, A_2 deux boréliens de A tels que $A_1 \cup A_2 = A$ et $\mu(A_1 \cap A_2) \neq 0$. Soit $f \in L_\mu^2(A)$ et soient $f_1 = f \mathbf{1}_{A_1}$ et $f_2 = f \mathbf{1}_{A_2}$ et $f^* = \int_A f d\mu$, $f_1^* = \int_{A_1} f d\mu$ et $f_2^* = \int_{A_2} f d\mu$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\|f - f^*\|_{L^2(A)} \leq C (\|f_1 - f_1^*\|_{L^2(A_1)} + \|f_2 - f_2^*\|_{L^2(A_2)}).$$

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire

$$\|f_1^* - f_2^*\|_{L^2(A_1 \cap A_2)} \leq \|f - f_1^*\|_{L^2(A_1 \cap A_2)} + \|f - f_2^*\|_{L^2(A_1 \cap A_2)} = \|f_1 - f_1^*\|_{L^2(A_1 \cap A_2)} + \|f_2 - f_2^*\|_{L^2(A_1 \cap A_2)}.$$

On sait en plus que

$$\|f_1 - f_1^*\|_{L^2(A_1 \cap A_2)} \leq \|f_1 - f_1^*\|_{L^2(A_1)}$$

et que

$$\|f_2 - f_2^*\|_{L^2(A_1 \cap A_2)} \leq \|f_2 - f_2^*\|_{L^2(A_2)}.$$

Ainsi

$$\|f_1^* - f_2^*\|_{L^2(A_1 \cap A_2)} \leq \|f_1 - f_1^*\|_{L^2(A_1)} + \|f_2 - f_2^*\|_{L^2(A_2)}.$$

Comme $\mu(A_1 \cap A_2) \neq 0$ on peut écrire

$$\|f_1^* - f_2^*\|_{L^2(A_2)} \leq \mu(A_2)\mu(A_1 \cap A_2)^{-1} (\|f_1 - f_1^*\|_{L^2(A_1)} + \|f_2 - f_2^*\|_{L^2(A_2)}). \quad (2.4.1)$$

On a aussi une inégalité simple déduite de la construction de f_1 et f_2 ,

$$\|f - f_1^*\|_{L^2(A)} \leq \|f_1 - f_1^*\|_{L^2(A_1)} + \|f_2 - f_1^*\|_{L^2(A_2)}. \quad (2.4.2)$$

Et encore par l'inégalité triangulaire

$$\|f_2 - f_1^*\|_{L^2(A_2)} \leq \|f_2 - f_2^*\|_{L^2(A_2)} + \|f_1^* - f_2^*\|_{L^2(A_2)} \quad (2.4.3)$$

Si on mit ensemble la (2.4.1), la (2.4.2) et la (2.4.3) on obtient

$$\|f - f_1^*\|_{L^2(A)} \leq (1 + \mu(A_2)\mu(A_1 \cap A_2)^{-1}) (\|f_1 - f_1^*\|_{L^2(A_1)} + \|f_2 - f_2^*\|_{L^2(A_2)}).$$

Par le lemme 2.33, $\|f - f^*\|_{L^2(A)} \leq \|f - f_1^*\|_{L^2(A)}$, alors si on prend $C := 1 + \mu(A_2)\mu(A_1 \cap A_2)^{-1}$ on obtient le résultat final. $\square$

On peut finalement démontrer une version de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger sur une surface de Riemann connexe et compacte.

Proposition 2.36. *Soit X une surface de Riemann connexe et compacte et soit ω une forme volume sur X . Alors il existe $C_\omega \in \mathbb{R}$ tel que pour toute $f \in E_\omega^0$, si on note $f^* := \int_X f \omega$, $\|f - f^*\|_{E_\omega^0} \leq C \|df\|_{E^1}$.*

Démonstration. Comme X est compacte on peut prendre $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un recouvrement d'ouverts de cartes avec image $\mathbb{D}$. Pour $1 \leq i \leq n$, soient $V_i := \cup_{j=1}^i U_j$. Comme X est connexe on peut supposer que pour $1 \leq i \leq n-1$, $V_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. On note $f_i := f \mathbf{1}_{U_i}$ et $m_i := \int_{U_i} f \omega$ et avec $f'_i := f \mathbf{1}_{U_i}$ et $m'_i := \int_{V_i} f \omega$.

Les fonctions f_i induisent des fonctions sur $\mathbb{D}$ qu'on appelle encore f_i . En plus la forme ω induit pour tout i une forme positive ω_i sur $\mathbb{D}$. Par le lemme 2.34, comme $f_i \in E_{\omega_i}^0(\mathbb{D})$, ils existent $C_i \in \mathbb{R}$ telles que $\|f_i - m_i\|_{E_{\omega_i}^0} \leq C_i \|df_i\|_{E_{\omega_i}^0}$. Du coup on a pour tout i

$$\|f_i - m_i\|_{E_\omega^0} \leq C_i \|df_i\|_{E^1} \leq C_i \|df\|_{E^1}. \quad (2.4.4)$$

Pour terminer la démonstration de la proposition on montre un lemme.

Lemme 2.37. *Pour tout $1 \leq i \leq n$ ils existent $C'_i \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\|f'_i - m'_i\|_{E_\omega^0} \leq C'_i \|df\|_{E^1}.$$

Démonstration. Si $i = 1$ c'est vrai par la (2.4.4), avec $C'_1 := C_1$ le résultat. On suppose que pour un certain $i \leq n-1$, $\|f'_i - m'_i\|_{E_\omega^0} \leq C'_i \|df\|_{E^1}$. On a déjà que $\|f_{i+1} - m_{i+1}\|_{E_\omega^0} \leq C_i \|df\|_{E^1}$. On utilise le lemme 2.35 avec $A_1 = V_i$, $A_2 = U_{i+1}$, $f = f_{i+1}$ et $\mu = \mu_\omega$. On peut l'utiliser comme $V_i \cap U_{i+1}$ est un ouvert non vide par hypothèse, donc $\mu_\omega(V_i \cap U_{i+1}) \neq 0$. Alors ce qu'on obtient c'est $\|f'_{i+1} - m'_{i+1}\|_{E_\omega^0} \leq C'_{i+1} \|df\|_{E^1}$ pour un certain $C'_{i+1} \in \mathbb{R}$ et donc on a prouvé le fait par récurrence. $\square$

Si on prend $i = n$ dans le lemme ce qu'on trouve c'est exactement le résultat qui on cherchait. $\square$

En utilisant aussi le théorème suivant on peut démontrer le théorème 2.32

Théorème 2.38. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, et soit T une distribution sur U telle que pour toute dérivation ∂_i , $\partial_i T = 0$, alors T est une distribution régulière T_c , où $c \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. (Théorème 2.32) On commence avec le calcul des noyaux. Supposons que $f \in E_\omega^0$ soit telle que $df = 0$. Alors pour toute carte complexe connexe de X , $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Par le théorème 2.38 f est constante sur toute carte connexe. Comme X est connexe et f est localement constante, f est constante. De l'autre côté si f est constante elle est aussi localement constante, ainsi $df = 0$.

Supposons que $d''f = 0$, alors pour toute carte complexe $\partial_{\bar{z}}f = 0$, alors par le théorème 1.14, f est holomorphe sur les cartes. Cela implique que f est holomorphe. Les fonctions holomorphes sur une surface de Riemann compacte et connexe sont constantes, donc f est constante. Réciproquement si f est constante alors $d''f = 0$.

Maintenant on s'occupe de montrer que le morphisme est strict. L'espace normé quotient $E_\omega^0 / \text{Ker } d = E_\omega^0 / \text{Ker } d''$, par la première partie de la preuve, est muni de la norme suivante : si $[f] \in E_\omega^0 / \text{Ker } d$, $\|[f]\| = \inf_{c \in \mathbb{C}} \|f - c\|_{E_\omega^0}$. Si on note $f^* := \int_X f \omega$, par le lemme 2.33, $\|[f]\| = \|f - f^*\|_{E_\omega^0}$. Comme d est continue, l'application induite de $d, \tilde{d} : E_\omega^0 / \text{Ker } d \rightarrow \text{Im } d$, est encore continue. Pour montrer que $\tilde{d}$ est un homéomorphisme il faut montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour toute $f \in E_\omega^0$, $\|[f]\| \leq C \|df\|_{E^1}$. Pour ce qu'on a dit c'est équivalente à montrer que $\|f - f^*\|_{E_\omega^0} \leq C \|df\|_{E^1}$. Cela c'est vrai grâce à la Proposition 2.36.

On peut faire le même raisonnement pour d'' , comme d'' est continue, la fonction induite $\tilde{d}''$ est aussi continue. Encore une fois, pour montrer que $\tilde{d}''$ est un homéomorphisme il faut montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour toute $f \in E_\omega^0$, $\|f - f^*\|_{E_\omega^0} \leq C \|d''f\|_{E^1}$. Par le lemme 2.28 c'est équivalent à montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour toute $f \in E_\omega^0$, $\|f - f^*\|_{E_\omega^0} \leq (C/2) \|df\|_{E^1}$. Mais cela c'est encore vrai grâce à la Proposition 2.36.

□

3 Dualité et théorème de finitude

Soit X une surface de Riemann connexe et compacte et soit ω une forme de volume sur X . On a défini dans la section 2 les espaces E_ω^0 et E_ω^2 qui dépendent de la forme ω . Dès maintenant on fixe la forme ω une fois pour toute et on note E_ω^0 et E_ω^2 par E^0 et E^2 respectivement.

Le but principal de cette section est de démontrer la finitude de l'espace $H = \text{Coker}(d'' : E^0 \rightarrow E^{0,1})$ dont l'on a besoin pour la construction des fonctions méromorphes qui séparent les points. Pour cela on va démontrer, à l'aide de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E^1 , un résultat de dualité qui nous permet d'identifier l'espace H au dual de $\Omega = \text{Ker}(d'' : E^{1,0} \rightarrow E^2)$. On verra que Ω est en fait l'espace des formes différentielles holomorphes sur X dont la finitude découle d'un théorème de Montel ou du théorème de De Rham. Enfin on déduit la finitude de H de celle de Ω .

Ce genre d'astuce rappelle un processus classique de la géométrie différentielle, celui la d'utiliser la dualité de Poincaré pour calculer des groupes de cohomologie à partir des autres.

3.1 Dualité entre H et Ω

Définition 3.1 (L'espace Ω). On note Ω le noyau de $d'' : E^{1,0} \rightarrow E^2$, i.e.

$$\Omega := \text{Ker}(d'' : E^{1,0} \rightarrow E^2)$$

On va montrer maintenant un résultat qui caractérise l'espace Ω .

Proposition 3.2. *L'espace Ω s'identifie à l'espace des classes de formes dans E^1 représentées par une forme différentielle holomorphe sur X , c'est-à-dire, l'espace des formes qui coïncide presque partout avec une forme différentielle holomorphe (comme dans la définition 2.10).*

Démonstration. Par la définition, on a $\Omega = \{\alpha \in E^{1,0} | d\alpha = d''\alpha = 0\}$. Mais par le lemme 2.30 et 2.31, $d\alpha = 0$ signifie que pour tout $f \in E^0$, on a $-\langle df, \alpha \rangle = -\langle d''f, \alpha \rangle = 0$, donc on peut écrire $\Omega = \{\alpha \in E^{1,0} | \forall f \in E^0, \langle d''f, \alpha \rangle = 0\}$.

Soit $\alpha \in \Omega$, on va montrer que α admet des expressions locales holomorphes. En effet, soit $x \in X$, (U, ϕ_U, z) une carte centrée en x avec $\phi_U(U) = \mathbb{D}$, on peut écrire $(\phi_U^{-1})^*\alpha|_U = h(z)dz$ où h est une fonction L^2 sur $\mathbb{D}$. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X à support compact dans U , alors $f \in E^0$ et $f_{\phi_U} := f \circ \phi_U^{-1}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{D}$. Donc on a par la définition de Ω que $\langle d''f, \alpha \rangle = 0$, i.e.

$$\int_{\mathbb{D}} h \frac{\partial f_{\phi_U}}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 2i \int_{\mathbb{D}} h \frac{\partial f_{\phi_U}}{\partial \bar{z}} dx dy = 0$$

Comme ϕ est un homéomorphisme biholomorphe, alors par le théorème 1.14, on a que h coïncide presque partout avec une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

Réciproquement, soit β une forme holomorphe, on va démontrer qu'elle définit un élément dans Ω , i.e. pour toute f dans E^0 , $\langle d''\beta, f \rangle = -\langle d''f, \beta \rangle = 0$. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$ un recouvrement ouvert de X tel que pour chaque i , (U_i, ϕ_i, z_i) soit une carte centrée en x_i avec $\phi_i(U_i) = \mathbb{D}$. Comme β une forme holomorphe sur X , alors $\beta_i := (\phi_i^{-1})^*\beta|_{U_i} = h_i dz_i$ est une forme holomorphe sur $\mathbb{D}$ avec h_i une fonction holomorphe. Soit $(\chi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Alors

$$\langle f, d''\beta \rangle = -\langle d''f, \beta \rangle = \int_X \beta \wedge d''f = \sum_{i=1}^n \int_X \chi_i \beta \wedge d''f = \int_X \beta \wedge \left(\sum_{i=1}^n \chi_i d''f \right)$$

Comme

$$\sum_{i=1}^n \chi_i = 1$$

on a

$$\sum_{i=1}^n d''\chi_i = d'' \left(\sum_{i=1}^n \chi_i \right) = 0$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n d''(\chi_i f) = \sum_{i=1}^n f d''\chi_i + \sum_{i=1}^n \chi_i d''f = \sum_{i=1}^n d''f \chi_i$$

Donc on a

$$\langle f, d''\beta \rangle = \int_X \beta \wedge \sum_{i=1}^n d''(f\chi_i) = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} \beta|_{U_i} \wedge d''(f\chi_i) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{D}} h_i(z) \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z}$$

où $f_i = (f\chi_i) \circ \phi_i^{-1}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact sur $\mathbb{D}$. Pour chaque i , h_i est une fonction méromorphe sur $\mathbb{D}$, donc par le théorème 1.14, on a

$$\int_{\mathbb{D}} h_i(z) \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z} = 2i \int_{\mathbb{D}} h_i \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} dx dy = 0$$

alors pour toute $f \in E^0$,

$$\langle f, d''\beta \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{D}} h_i(z) \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z} = 0$$

Donc $\beta \in \text{Ker}(d'' : E^{1,0} \rightarrow E^2) = \Omega$. □

Définition 3.3 (L'espace H). On note H le conoyau de $d'' : E^0 \rightarrow E^{0,1}$, i.e.

$$H := \text{Coker}(d'' : E^0 \rightarrow E^{0,1})$$

Maintenant on va montrer le théorème de la dualité en utilisant le théorème clé 2.32 que l'on a montré dans la section 2. Pour cela on va d'abord expliciter la façon de la quelle on utilise le fait que le morphisme $d'' : E^0 \rightarrow E^{0,1}$ est strict ; en effet, par le théorème 1.6, l'espace $\text{Im}(d'')$ est un sous-espace fermé de $E^{0,1}$, ce qui implique que H s'identifie à l'espace vectoriel normé quotient de $E^{0,1}$ par le sous-espace fermé $\text{Im}(d'')$, donc H vérifie des propriétés que l'on a démontré dans la Sous-section 1.1. Ces propriétés constitue les points clés dans la démonstration.

Enfin, on donne la démonstration de la dualité entre H et Ω en tant qu'espaces vectoriel topologiques.

Théorème 3.4. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un isomorphisme entre Ω et le dual topologique de H .

Démonstration. Par composer l'inclusion $\iota : \Omega \rightarrow E_{0,1}$ et l'application que l'on définit dans la proposition 2.22 :

$$\begin{aligned} \phi : E^{1,0} &\rightarrow (E^{0,1})^* \\ \alpha &\mapsto \phi(\alpha) = (\alpha^* : \alpha \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle) \end{aligned}$$

on obtient d'une manière naturelle l'application $\phi|_{\Omega} : \Omega \rightarrow (E^{0,1})^*$. Considérons $\alpha \in \Omega$ alors $\phi|_{\Omega}(\alpha)$ est la forme linéaire continue $\alpha^* : \beta \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$ sur $E^{0,1}$.

$$\begin{array}{ccc} E^{0,1} & \xrightarrow{\pi} & H \\ \alpha^* \downarrow & \swarrow \bar{\alpha}^* & \\ \mathbb{C} & & \end{array}$$

On a vu dans la proposition 3.2 que $\Omega = \{\alpha \in E^{1,0} | \forall f \in E^0, \langle d''f, \alpha \rangle = 0\}$, donc $\text{Ker}(\pi) = \text{Im}(d'') \subseteq \text{Ker}(\alpha^*)$. D'après le théorème clé 2.32 (la proposition 1.6), $\text{Im}(d'')$ est un sous-espace fermé de $E^{0,1}$, H est l'espace vectoriel normé quotient de $E^{0,1}$ par le sous-espace fermé $\text{Im}(d'')$, donc H est un espace de Hilbert par la proposition 1.4. De plus, par la proposition 1.2, on obtient une forme linéaire continue $\bar{\alpha}^*$ sur H qui rend le diagramme ci-dessus commutatif. Ainsi on peut construire une application linéaire

$$\begin{aligned} \theta : \Omega &\rightarrow H^* \\ \alpha &\mapsto \bar{\alpha}^*. \end{aligned}$$

De plus, $\pi^* : u \mapsto u \circ \pi$ est injective, d'où on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega & \xrightarrow{\iota} & E^{1,0} \\
& & \downarrow \theta & \searrow \phi|_{\Omega} & \downarrow \phi \\
0 & \longrightarrow & H^* & \xrightarrow{\pi^*} & (E^{0,1})^*
\end{array}$$

En outre, dans la démonstration de la proposition 2.22, on a vu que ϕ est continue, donc $\phi|_{\Omega}$ l'est aussi. Donc encore par la propriété universelle des quotients dans la proposition 1.2, on a que $\theta : H \rightarrow \Omega^*$ est continue.

D'ailleurs, en identifiant par la définition 2.29 les espace $(E^0)^*$ et E^2 , on a que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc}
E^{1,0} & \xrightarrow{d''} & E^2 \\
\downarrow \phi \simeq & & \downarrow = \\
(E^{0,1})^* & \xrightarrow{(d'')^*} & (E^0)^*
\end{array}$$

En effet, quel que soit $\alpha \in E^{1,0}$, on a

$$(d'')^* \circ \phi(\alpha) = (d'')^*(\alpha^*) = \alpha^* \circ d'' : f \in E^0 \mapsto \langle \alpha, d'' f \rangle = -\langle d'' f, \alpha \rangle = d'' \alpha(f)$$

donc $(d'')^*(\alpha^*) = d'' \alpha$, ainsi $(d'')^* \circ \phi = d''$, d'où la commutativité du diagramme ci-dessus.

En combinant ces deux diagrammes ci-dessus, on obtient enfin :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega & \xrightarrow{\iota} & E^{1,0} & \xrightarrow{d''} & E^2 \\
& & \downarrow \theta & & \downarrow \phi \simeq & & \downarrow = \\
0 & \longrightarrow & H^* & \xrightarrow{\pi^*} & (E^{0,1})^* & \xrightarrow{(d'')^*} & (E^0)^*
\end{array}$$

De plus, la suite en bas

$$0 \rightarrow H^* \xrightarrow{\pi^*} (E^{0,1})^* \xrightarrow{(d'')^*} (E^0)^*$$

est exacte. En effet, π^* est injective par définition ; il suffit de montrer que $\text{Ker}((d'')^*) = \text{Im}(\pi^*)$. D'une part, pour tout $u \in \text{Im}(\pi^*)$, il existe $v \in H^*$, tel que $u = v \circ \pi$, donc

$$(d'')^*(u) = v \circ \pi \circ d'' = 0$$

d'où $u \in \text{Ker}((d'')^*)$, ainsi $\text{Im}(\pi^*) \subseteq \text{Ker}((d'')^*)$. D'autre part, quel que soit $\gamma \in \text{Ker}((d'')^*) \subset (E^{0,1})^*$, on a $\gamma \circ d'' = 0$, d'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
E^0 & \xrightarrow{d''} & E^{0,1} & \xrightarrow{\pi} & H & \longrightarrow & 0 \\
& \searrow 0 & \downarrow \gamma & & \swarrow \bar{\gamma} & & \\
& & \mathbb{C} & & & &
\end{array}$$

On a vu que H est l'espace vectoriel normé quotient de $E^{0,1}$ par $\text{Im}(d'')$ et que γ s'annule sur $\text{Im}(d'')$, donc par la proposition 1.2 il existe une unique forme linéaire continue $\bar{\gamma}$ sur H telle que $\gamma = \bar{\gamma} \circ \pi$, d'où $\gamma \in \text{Im}(\pi^*)$. Ainsi $\text{Ker}((d'')^*) = \text{Im}(\pi^*)$.

Alors en appliquant le lemme des cinq pour la catégorie abélienne des espaces vectoriels, on voit que l'exactitude des deux suites horizontales implique que $\theta : \Omega \rightarrow H^*$ est un isomorphisme d'espaces

vectoriels. De plus, on a déjà démontré que θ est continue; comme Ω et H^* sont tous les deux des espaces de Hilbert, donc par le théorème d'application ouverte, θ est aussi un homéomorphisme d'espaces topologiques. Finalement, θ est un isomorphisme d'espace de Hilbert. $\square$

3.2 Démonstrations du théorème de finitude

On propose trois façons différentes pour démontrer le théorème de finitude, la première comme une conséquence du théorème de Montel, la deuxième déduite de la finitude de la cohomologie de De Rham et la troisième du fait que le groupe fondamental des surfaces de Riemann est finiment engendré. Voilà l'énoncé du théorème :

Théorème 3.5 (théorème de finitude pour Ω). *L'espace des formes holomorphes sur une surface de Riemann connexe compacte X est de dimension finie, i.e. $\dim_{\mathbb{C}} \Omega < +\infty$.*

Remarque. C'est un cas particulier d'un théorème de Cartan-Serre sur la finitude des groupes de cohomologie à valeurs dans un faisceau cohérent sur une variété complexe compacte.

On montre d'abord la conséquence du théorème de finitude de Ω .

Théorème 3.6 (théorème de finitude pour H). *Soit X une surface de Riemann connexe compacte et ω une forme volume. Alors le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $H = \text{Coker}(E_{\omega}^0 \xrightarrow{d''} E^{0,1})$ est de dimension finie. En particulier $\dim_{\mathbb{C}} H = \dim_{\mathbb{C}} \Omega$, donc la dimension de H ne dépende pas de ω .*

Démonstration. Par le théorème 3.4 Ω est isomorphe au dual topologique de H . On a vu que H est un espace de Hilbert, donc par le théorème de représentation de Riesz, H est isomorphe à H^* ; en particulier, la finitude de H^* implique celle de H . Par le théorème 3.5 l'espace Ω alors $\dim_{\mathbb{C}} H$ est finie et $\dim_{\mathbb{C}} H = \dim_{\mathbb{C}} \Omega$. $\square$

3.2.1 Première démonstration

Comme Ω est un sous-espace vectoriel de l'espace E^1 , ce dernier étant un espace de Hilbert, donc d'après le théorème 1.10 (Riesz), il suffit de montrer que Ω est localement compact. En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 3.7. *L'espace Ω des formes holomorphes sur une surface de Riemann compacte connexe X est localement compact.*

Démonstration. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de formes holomorphes dans Ω , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\alpha_n\| \leq 1$, on veut montrer que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente (pour la norme $\|\cdot\|_{E^1}$) dans Ω . Comme X compact, on peut prendre un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de X constitué par les cartes. On écrit $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ où pour chaque i , (U_i, ϕ_i, z) est une carte centrée en x_i avec $\phi_i(U_i) = \mathbb{D}$.

Sur U_1 , pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $\alpha_n^{(1)} := (\phi_1^{-1})^* \alpha_n|_{U_1} = h_n^{(1)}(z) dz$ avec $h_n^{(1)}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. Par le lemme 1.21, pour tout compact K dans $\mathbb{D}$, il existe une constante C_K qui ne dépend que de K , telle que

$$\|h\|_{L^\infty(K)} \leq C_K \|h\|_{L^2(\mathbb{D})}.$$

Mais par le lemme 2.9 on a que

$$\|h_n^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{D})}^2 = \int_{\mathbb{D}} |h_n^{(1)}|^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_{U_1} \alpha_n \wedge * \alpha_n \leq \frac{1}{2} \int_X \alpha_n \wedge * \alpha_n = \frac{1}{2} \|\alpha_n\|_{E^1}^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Donc pour tout compact K dans $\mathbb{D}$, $|h_n^{(1)}| \leq C_K / \sqrt{2}$ sur K , d'où la famille $(h_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Par le théorème de Montel, $(h_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille normale sur $\mathbb{D}$, donc elle admet une sous-suite extraite convergente uniformément, disons $(h_{n_l}^{(1)})_{l \in \mathbb{N}}$.

Maintenant remplaçant la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(\alpha_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ et l'ouvert U_1 par U_2 , on répète la même procédure et on obtient une sous-suite $(\alpha_{n_l^2})_{l \in \mathbb{N}}$ extraite de $(\alpha_{n_l^{(1)}})_{l \in \mathbb{N}}$ donc de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(h_{n_l^{(2)}}^{(2)})$ converge uniformément sur tout compact dans $\mathbb{D}$. En itérant cette procédure pour $i = 1, 2, \dots, k$, on obtient enfin une sous-suite convergente extraite de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à savoir, $(\alpha_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ avec $n_l = n_l^{(k)}$. On a que pour tout $1 \leq i \leq k$ $(h_{n_l}^{(i)})_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Soit $(\chi_i)_{1 \leq i \leq k}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$ et pour chaque i , soit K_i le support de χ_i , alors $K_i \subset U_i$ est un compact ; comme ϕ_i est un homéomorphisme, donc $F_i := \phi_i(K_i)$ est aussi un compact dans $\mathbb{D}$. De plus, F_i est le support de la fonction $\eta_i = \chi_i \circ \phi_i^{-1}$ sur $\mathbb{D}$. Soit $M = \sum_{i=1}^k \lambda(F_i)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Maintenant, quelque soit $\epsilon > 0$, pour tout i , comme $(h_{n_l}^{(i)})_{l \in \mathbb{N}}$ converge sur F_i , il existe un entier $L_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $l, l' \geq L_i$, on a

$$\|h_{n_l}^{(i)} - h_{n_{l'}}^{(i)}\|_{L^\infty(F_i)} < \epsilon/\sqrt{2M}.$$

Soit $L = \max_{1 \leq i \leq k} L_i$, pour tous $l, l' \geq L$, on a par le lemme 2.9 :

$$\begin{aligned} \|\alpha_{n_l} - \alpha_{n_{l'}}\|_{E^1}^2 &= \int_X (\alpha_{n_l} - \alpha_{n_{l'}}) \wedge *(\alpha_{n_l} - \alpha_{n_{l'}}) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \chi_i (\alpha_{n_l}|_{U_i} - \alpha_{n_{l'}}|_{U_i}) \wedge *(\alpha_{n_l}|_{U_i} - \alpha_{n_{l'}}|_{U_i}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{D}} \eta_i(z) |h_{n_l}^{(i)}(z) - h_{n_{l'}}^{(i)}(z)|^2 dx dy = 2 \sum_{i=1}^k \int_{F_i} \eta_i(z) |h_{n_l}^{(i)}(z) - h_{n_{l'}}^{(i)}(z)|^2 dx dy \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^k \int_{F_i} \eta_i(z) \|h_{n_l}^{(i)} - h_{n_{l'}}^{(i)}\|_{L^\infty(F_i)}^2 dx dy \leq 2 \sum_{i=1}^k \lambda(F_i) \|h_{n_l}^{(i)} - h_{n_{l'}}^{(i)}\|_{L^\infty(F_i)}^2 \\ &< 2M \cdot (\epsilon/\sqrt{2M})^2 = \epsilon^2. \end{aligned}$$

Donc $\|\alpha_{n_l} - \alpha_{n_{l'}}\|_{E^1} < \epsilon$, d'où $(\alpha_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Ω . Comme Ω est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $E^{1,0}$, donc Ω lui-même est aussi un espace de Hilbert, et donc $(\alpha_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|_{E^1}$. Ainsi Ω est localement compact. $\square$

3.2.2 Deuxième démonstration

Une deuxième démonstration du théorème consiste à montrer qu'il existe une inclusion induite par la composition :

$$\Omega = \Omega^1(X) \hookrightarrow Z^1(X) \twoheadrightarrow H_{dR}^1(X)$$

et on conclut par la finitude de la cohomologie de De Rham. Donc on se ramène à démontrer ces deux résultats ci-dessous :

Théorème 3.8 (finitude de la cohomologie de De Rham). *Soit M une variété différentielle compacte. Alors pour tout entier $k \geq 0$, le k -ième groupe de la cohomologie de De Rham $H_{dR}^k(M)$ est de dimension finie.*

et

Proposition 3.9. *Soit X une surface de Riemann compacte, alors le morphisme d'espaces vectoriels défini par*

$$\Omega = \Omega^1(X) \hookrightarrow Z^1(X) \twoheadrightarrow H_{dR}^1(X)$$

est injectif.

I. La cohomologie de De Rham Ici on va donner une brève introduction à la cohomologie de De Rham et présenter quelques résultats élémentaires que l'on va utiliser après.

Définition-Proposition 3.10 (Cohomologie de De Rham). Soit M une variété différentielle, soit $\mathcal{E}^k(M)$ l'espace des k -formes $\mathcal{C}^\infty$ globales sur M ⁵, i.e. l'espace des $\mathcal{C}^\infty$ -sections globales du fibré cotangent de M . Pour chaque $k \geq 0$, soit $d^k : \mathcal{E}^k(M) \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}(M)$ la différentielle extérieure, alors on dispose d'un complexe dans la catégorie des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{E}^k(M) \xrightarrow{d^k} \mathcal{E}^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

On définit la k -ième cohomologie de De Rham de M le k -ième groupe de cohomologie de ce complexe, i.e.

$$H_{dR}^k(M) := H^k(\mathcal{E}^*(M)).$$

5. En effet, ici on note $\mathcal{E}^k$ le faisceau des $\mathcal{C}^\infty$ k -formes locales sur M .

Plus précisément, pour chaque k , soit $Z^k(M) := \text{Ker}(d^k : \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}(M))$ le sous-espace de $\mathcal{E}^k(M)$ constitué par les k -formes fermées et soit $B^k(M) := \text{Im}(\mathcal{E}^{k-1} \rightarrow \mathcal{E}^k)$ le sous-espace de $\mathcal{E}^k(M)$ constitué par les k -formes exactes. Alors $B^k(M) \subset Z^k(M)$, et on a

$$H_{dR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{E}^*(M)$ est vraiment un complexe. C'est claire par la propriété de la différentielle extérieure : pour tout $k \geq 0$, $d^{k+1} \circ d^k = 0$. $\square$

Maintenant on va présenter des propriétés importantes sans les démontrer.

Proposition 3.11 (Fonctorialité et Invariance par homotopie). *Soient M et N variétés différentielles, soit $f : M \rightarrow N$ une application continue, alors pour tout k f induit un morphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels*

$$H_{dR}^k(f) : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M).$$

De plus, on a :

1. H_{dR}^k est un foncteur contravariant de la catégorie des variétés différentielles vers celle des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, c'est-à-dire : soit $g : N \rightarrow P$ une application continue avec P une variété différentielle, alors $H_{dR}^*(g \circ f) = H_{dR}^*(f) \circ H_{dR}^*(g)$.
2. $H_{dR}^*(f)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f , c'est-à-dire, si f et f_1 sont homotopes⁶, alors $H_{dR}^*(f) = H_{dR}^*(f_1)$.

L'invariance de la cohomologie de De Rham par homotopie et le calcul élémentaire de la cohomologie de De Rham de $\mathbb{R}^1$ implique le corollaire suivant :

Corollaire 3.12 (Lemme de Poincaré). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$H_{dR}^*(\mathbb{R}^n) = H_{dR}^*(point) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } * = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonctorialité de la cohomologie de De Rham à une autre conséquence, à savoir, la suite de Mayer-Vietoris :

Proposition 3.13 (Suite de Mayer-Vietoris). *Soit M une variété différentielle, $\{U, V\}$ un recouvrement de M , donc la suite des inclusions*

$$U \cap V \rightrightarrows U \sqcup V \rightarrow M$$

induit une suite exacte courte des complexes de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^*(M) \rightarrow \mathcal{E}^*(U) \oplus \mathcal{E}^*(V) \rightarrow \mathcal{E}^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

où la flèche $\mathcal{E}^*(V) \rightarrow \mathcal{E}^*(U \cap V)$ est définie par $(\sigma, \tau) \mapsto \tau - \sigma$. Cette suite est appelée la suite de Mayer-Vietoris, ce qui donne lieu à une suite exacte longue pour la cohomologie :

$$\cdots \rightarrow H_{dR}^k(M) \rightarrow H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \rightarrow H_{dR}^k(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H_{dR}^{k+1}(M) \rightarrow \cdots$$

II. Démonstration de la proposition 3.9 Dans ce paragraphe, on va donner une démonstration de la proposition 3.9 :

Démonstration de la proposition 3.9. La flèche $proj : Z^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(X)$ est par définition surjective ; on vérifie donc tout d'abord que la flèche $\Omega \rightarrow Z^1(X)$ est vraiment une inclusion. Comme $Z^1(X)$ et Ω sont tous les deux sous-espace de $\mathcal{E}^1$, il suffit d'identifier chaque forme holomorphe sur X dans Ω à un élément dans $Z^1(X)$, et donc il suffit de montrer que chaque 1-forme holomorphe sur X est fermée. En effet, pour toute forme holomorphe $\omega \in \Omega$, on a $d''\omega = 0$, puisque $\Omega = \text{Ker}(d'' : E^{1,0} \rightarrow E^2)$, donc il reste à montrer que $d'\omega = 0$. On peut le vérifier sur chaque carte de X : pour toute carte (U, ϕ, z) de X , on peut supposer que $\phi(U) = \mathbb{D}$, alors il existe une fonction holomorphe h sur $\mathbb{D}$ telle que $(\phi^{-1})^*(\omega|_U) = h(z)dz$. Alors par la commutativité de la différentielle extérieure avec le tiré en arrière (pull-back)⁷, on obtient :

$$(\phi^{-1})^*(d'\omega) = d'((\phi^{-1})^*\omega) = \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge dz = 0.$$

6. Deux application continue ϕ et ψ de l'espace topologique X vers l'espace topologique Y sont homotopes si il existe une application continue $\Theta : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $\Theta(\cdot, 0) = \phi$, $\Theta(\cdot, 1) = \psi$

7. c.f. [1]

Donc $\Omega \subset Z^1(X)$, d'où une inclusion $incl : \Omega \hookrightarrow Z^1(X)$.

Maintenant on va démontrer que l'application linéaire $proj \circ incl$ est injective. Il suffit de montrer que $\text{Ker}(proj \circ incl) = 0$. Soit $\alpha \in \text{Ker}(proj \circ incl)$, alors α est une forme holomorphe exacte, donc il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur X telle que $\alpha = df$. Par la proposition 2.12 f est une fonction holomorphe sur X . Comme X est compacte, par le principe de maximum, f est constante, donc $\alpha = df = 0$, ce qui implique l'injectivité de $proj \circ incl$. $\square$

III. Plongement des variétés compactes dans un espace euclidien Pour démontrer la finitude de la cohomologie de De Rham pour variétés différentielles compactes, on veut montrer tout d'abord que les variétés différentielle compactes admettent un plongement dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$ avec N assez grand, à savoir, la proposition suivant :

Proposition 3.14 (Théorème de plongement de Whitney « facile »). *Soit M une variété différentielle compacte, alors il existe un $\mathcal{C}^\infty$ -plongement⁸*

$$\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^N$$

avec N un entier assez grand.

Démonstration. Pour tout $x \in M$, il existe une carte (U_x, ϕ_x) centrée en x , telle que $\phi_x(U) = B(0, 2)$, et on note $V_x = \phi_x^{-1}(B(0, 1))$, alors $\{V_x\}_{x \in M}$ Comme M est compacte, recouvrement fini, disons, $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ avec (U_i, ϕ_i) la carte correspondant à V_i centrée en x_i . Alors, il existe des fonctions plateau $\eta_i \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ au-dessus de $\bar{V}_i$ et à support compact dans U_i , i.e.

- $\eta_i \equiv 1$ sur V_i ;
- $0 < \eta_i < 1$ sur $U_i - \bar{V}_i$;
- $\eta_i \equiv 0$ hors de U_i .

Notons $m = \dim M$. Posons $N = km + k = k(m + 1)$ et posons $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ l'application définie par

$$\iota(q) = (\eta_1(q)\phi_1(q), \dots, \eta_k(q)\phi_k(q), \eta_1(q), \dots, \eta_k(q))$$

où $\eta_i \cdot \phi_i$ est une fonction définie sur U_i qui s'étend naturellement (par 0) en une fonction sur M tout entier. Alors ι est une $\mathcal{C}^\infty$ -application. Maintenant on va vérifier que ι est une immersion injective :

- **ι est une immersion.** Pour tout point $q \in M$, il existe un $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tel que $q \in V_i$. Alors $\eta_i(q)\phi_i(q) = \phi_q$, alors l'expression locale de f près de q s'écrit

$$f_{\phi_i}(x_1, \dots, x_m) = f \circ \phi_i^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (* * *, x_1, x_2, \dots, x_m, * * *).$$

Ainsi ι est une immersion en q .

- **ι est injective.** Soit $q, q' \in M$ tels que $\iota(q) = \iota(q')$, alors pour tout i , on a $\eta_i(q) = \eta_i(q')$ et $\eta_i(q)\phi_i(q) = \eta_i(q')\phi_i(q')$. Supposons que $q \in V_j$ pour un certain j , alors $\eta_j(q') = \eta_j(q) = 1$, donc $q' \in \bar{V}_j$ et $\phi_j(q) = \phi_j(q')$. Mais ϕ_j est un homéomorphisme sur U_j , d'où $q = q'$. Ainsi ι est injective. $\square$

D'après la proposition 3.14, on peut regarder M comme une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ et soit $\pi : NM \rightarrow M$ le fibré normal de M dans $\mathbb{R}^N$ ⁹. Alors NM est muni d'une structure de variété différentielle. On veut maintenant prolonger M dans un « petit » voisinage dans $\mathbb{R}^N$, tel que l'inclusion induise une inclusion en cohomologie de De Rham, de laquelle on se ramène enfin au cas où M admet un « bon » recouvrement (défini dans la définition 3.17) fini. Pour cela on a besoin du théorème de ci-dessous :

Théorème 3.15 (Théorème de voisinage tubulaire). *Soit M une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^N$ et soit ψ l'application $NM \rightarrow \mathbb{R}^N$ qui associe $(x, v) \in NM$ avec $x \in M$ et $v \in (NM)_x \subset T_x \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$ à $x + v \in \mathbb{R}^N$. Alors il existe un voisinage Δ de la section nulle $\epsilon(M)$ dans NM , tel que $\psi(\Delta)$ soit un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et que $\psi|_\Delta : \Delta \rightarrow \psi(\Delta)$ soit un difféomorphisme.*

Pour démontrer le théorème 3.15 on utilise le lemme suivant :

8. Un $\mathcal{C}^\infty$ -prolongement $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés différentielles M et N est une immersion qui induit un homéomorphisme entre M et $f(M)$. En particulier, si M est compacte, alors une immersion $f : M \rightarrow N$ est un plongement si et seulement si f est injective.

9. i.e. le supplémentaire orthogonal du fibré tangent TM de M dans $T\mathbb{R}^N|_M$.

Lemme 3.16. Soient Y et W deux variétés différentiables de classe C^∞ et soit X une sous-variété compacte de Y . Si $f : Y \rightarrow W$ est un difféomorphisme local¹⁰, alors X possède un voisinage U dans Y tel que $f(U)$ soit ouvert dans W et que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ soit un difféomorphisme.

Démonstration. Comme f est étale, il suffit de trouver un voisinage U sur lequel f est injectif. En effet, si f est injectif sur U , donc $f|_U : U \rightarrow f(U)$ admet une inverse, qui est aussi différentiable car f est étale ; donc $f|_U$ est un difféomorphisme de U sur son image.

Pour tout $x \in X$, il existe une carte (V_x, ϕ_x) centrée en x telle que $f|_{V_x}$ est un difféomorphisme et $\phi_x(V_x) = B(0, 1)$ où $B(x, r)$ est la boule dans $\mathbb{R}^n$ (on note $n = \dim M = \dim N$) de centre x et de rayon r . Pour $0 < r \leq 1$, notons

$$V_{x,r} = \phi_x^{-1}(B(0, r)).$$

Comme X est une sous-variété compacte, on peut trouver, pour tout $r \in]0, 1]$ des points $X_1, \dots, X_{n(r)}$ où $n(r)$ est un nombre qui dépend de r , tels que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(r)} V_{x_i, r}.$$

Notons $U_r = \bigcup_{i=1}^{n(r)} V_{x_i, r}$, c'est un voisinage de X dans M . De plus, si $r \in]0, 1[$,

$$\bar{U}_r = \bigcup_{i=1}^{n(r)} \bar{V}_{x_i, r} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(r)} \phi_{x_i}^{-1}(\bar{B}(0, r))$$

donc $\bar{U}_r$ est un fermé d'un compact, ainsi il est aussi compact. On va montrer qu'il existe $r_0 \in]0, 1[$ tel que $\phi|_{U_{r_0}}$ est injectif.

Supposons par l'absurde que pour aucun $r \in]0, 1[$, $\phi|_{U_r}$ n'est injectif. Alors en posant $r = 1/k$, on obtient pour chaque $k \in \mathbb{N}$ des points $u_k, v_k \in U_{1/k}$ tels que $f(u_k) = f(v_k)$, $u_k \neq v_k$. Quand $k = 2$, les ouverts $V_{x_1, 1/2}, \dots, V_{x_{n(1/2)}, 1/2}$ forment un recouvrement de X , alors par la compacité de X , il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in X$, $V_{x, \delta} \subseteq V_{x_i, 1/2}$ pour un certain i entre 1 et $n(1/2)$.¹¹ Donc quand k assez grand (par exemple, quand $k \geq 1/\delta$), on a $u_k, v_k \in U_{1/k} \subseteq U_{1/2}$. Par la compacité de $\bar{U}_{1/2}$, les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admettent respectivement des sous-suites convergentes dans $\bar{U}_{1/2}$, disons $(u_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ et $(v_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ respectivement. Comme $u_k, v_k \in U_{1/k}$, donc les limites $u = \lim_{i \rightarrow +\infty} u_{k_i}$ et $v = \lim_{i \rightarrow +\infty} v_{k_i}$ sont dans l'adhérence de X . Mais X est compact donc fermé dans M , donc $u, v \in X = \bar{X}$. Par la continuité de f , $f(u) = f(v)$ car pour tout i , $f(u_{k_i}) = f(v_{k_i})$. Comme f est injective sur X , on a forcément $u = v$. Soit V un voisinage assez petit de $u = v$ dans M tel que $f|_V$ est un difféomorphisme de V sur son image. Alors par la convergence il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k_{i_0}}, v_{k_{i_0}} \in V$; on a que $u_{k_{i_0}} \neq v_{k_{i_0}}$ et que $f(u_{k_{i_0}}) = f(v_{k_{i_0}})$, ce qui contredit le fait que $f|_V$ est un difféomorphisme.

Ainsi prenant $U = U_{r_0}$ un voisinage de X dans M , on a que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ est un difféomorphisme. $\square$

Démonstration du théorème 3.15. Il suffit de vérifier que l'application ψ ainsi définie est un difféomorphisme. En effet, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U dans $\mathbb{R}^N$ muni d'un difféomorphisme sur son image $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que $\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap M) = (\mathbb{R}^m \times 0) \cap \tilde{\phi}(\tilde{U})$, où $m = \dim M$. Donc l'homéomorphisme

$$\phi = proj_{1, \dots, m}^{\mathbb{R}^N} \circ \tilde{\phi}|_M : U = \tilde{U} \cap M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

fournit une carte locale de M près de x . De plus, quitte à faire une restriction, on peut supposer que U trivialise le fibré NM , avec la trivialisation

$$\tau : (NM)|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^{N-m}$$

telle que pour tout $y \in U$ et $w \in (NM)_y$ avec $y + w \in \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^N$, on a que $\tau(y, w) = (y, proj_{m+1, \dots, N}^{\mathbb{R}^N} \circ \tilde{\phi}(w))$. Donc la différentielle de ψ en $(x, v) \in NM$ sous la carte $(\phi \times id_{\mathbb{R}^{N-m}}) \circ \tau$ s'écrit :

$$D_{(\phi(x), \tau(v))}(\psi \circ \tau^{-1} \circ (\phi \times id_{\mathbb{R}^{N-m}})^{-1}) = \begin{pmatrix} D_{(x,0)}(\tilde{\phi}^{-1} \circ incl_{\mathbb{R}^N}^{1, \dots, m}) & D_v \tau^{-1} \end{pmatrix}$$

10. Dans ce cas, on dit aussi que f est un morphisme étale.

11. L'existence de tel δ est un analogue de celle du nombre de Lebesgue pour un recouvrement ouvert d'un espace métrique compact.

Quitte à faire une translation, on peut supposer de plus que $v \in \tilde{U}$, et donc on a

$$D_{(\phi(x), \tau(v))}(\psi \circ \tau^{-1} \circ (\phi \times id_{\mathbb{R}^{N-m}})^{-1}) = D_{(x,v)}\tilde{\phi}^{-1}$$

Comme $\tilde{\phi}$ est un difféomorphisme de $\tilde{U}$ sur son image, donc pour tout $(x, v) \in NM$, la différentielle ψ en x, v est une application linéaire bijective, d'où ψ est un difféomorphisme local. En identifiant M et la 0-section du fibré NM , on déduit le théorème du lemme 3.16 ci-dessus. $\square$

Prenons pour chaque $x \in M$ une boule B_x tel que $B_x \subset \psi(\Delta)$ avec ψ l'application définie dans le théorème 3.15 ci-dessus, alors $\{B_x\}_{x \in M}$ est un recouvrement ouvert de M dans $\mathbb{R}^N$. Comme M compacte, il en existe un sous-recouvrement fini, disons $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n}$ (on écrit B_i pour B_{x_i}). On pose

$$V = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

alors V est un voisinage de M dans $\mathbb{R}^N$ et il est donc lui-même aussi une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^N$. On dispose d'une inclusion :

$$i : M \hookrightarrow V.$$

De plus, par la construction de V , $V \subset \psi(\Delta)$. Comme ψ est un difféomorphisme entre Δ et $\psi\Delta$ on obtient une projection

$$p = \pi \circ \psi|_V^{-1} : V \rightarrow M$$

et on a $p \circ i = id_M$. Par la functorialité de H_{dR}^* , on obtient les morphismes de groupes de cohomologie $p^* = H_{dR}^*(p)$ et $i^* = H_{dR}^*(i)$ et on a $i^* \circ p^* = id_{H_{dR}^*(M)}$, donc le morphisme

$$p^* : H_{dR}^*(M) \rightarrow H_{dR}^*(V)$$

est injectif (p^* admet un inverse à gauche). Donc pour démontrer la finitude des $H_{dR}^*(M)$, il suffit de démontrer la finitude des $H_{dR}^*(V)$.

Par la construction de V , on voit qu'il est une variété différentielle qui admet un « bon » recouvrement au sens suivant :

Définition 3.17 (« bons » recouvrements). Soit M une variété différentielle, un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ est appelé un « bon » recouvrement si pour toute partie finie $\{i_1, \dots, i_q\}$ de I telle que l'intersection $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}$ n'est pas vide, on a que $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^k$ pour certain k .

En effet, V est la réunion d'un nombre fini de boules $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n}$, on vérifie que c'est un « bon » recouvrement de V . On prend $B(x_{i_1}, \epsilon), B(x_{i_2}, \epsilon), \dots, B(x_{i_q}, \epsilon)$ avec $\{i_1, i_2, \dots, i_q\}$ une partie finie de $\{1, 2, \dots, n\}$ et on veut montrer que $B(x_{i_1}, \epsilon) \cap B(x_{i_2}, \epsilon) \cap \dots \cap B(x_{i_q}, \epsilon)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^N$. Comme les ouverts convexes de $\mathbb{R}^N$ sont difféomorphes à $\mathbb{R}^N$, il suffit de montrer que $B(x_{i_1}, \epsilon) \cap B(x_{i_2}, \epsilon) \cap \dots \cap B(x_{i_q}, \epsilon)$ est convexe. Mais on sait que les boules sont convexes dans $\mathbb{R}^N$ et que l'intersection fini non-vide des convexes est encore convexe, d'où $B(x_{i_1}, \epsilon) \cap B(x_{i_2}, \epsilon) \cap \dots \cap B(x_{i_q}, \epsilon)$ est convexe et donc homéomorphe à $\mathbb{R}^N$. Ainsi V admet un « bon » recouvrement.

Remarque. En effet, avec un peu de connaissance sur la géométrie riemannienne, on peut démontrer de plus que toute variété différentielle admet un « bon » recouvrement. La démonstration consiste à démontrer que les ouverts géodésiquement convexes d'une variété riemannienne de dimension n sont homéomorphes à $\mathbb{R}^n$.

Par le raisonnement ci-dessus, on se ramène à démontrer la finitude des groupes de la cohomologie de De Rham pour toute variété admettant un « bon » recouvrement fini, à savoir la proposition suivante :

Proposition 3.18. *Soit U une variété différentielle. Si U admet un « bon » recouvrement fini, alors les groupes de la cohomologie de De Rham de U sont de dimension finie.*

IV. Démonstration du théorème 3.8 Dans ce paragraphe on va donner une démonstration de la proposition 3.18 en utilisant un argument de Mayer-Vietoris, et on en déduit le théorème 3.8.

Démonstration de la proposition 3.18. On utilise un argument de Mayer-Vietoris : par récurrence sur le cardinal K du « bon » recouvrement.

Pour $K = 1$, c'est un résultat du lemme de Poincaré (corollaire 3.12).

Supposons que les groupes de cohomologie de De Rham sont de dimension finie pour les variétés différentielles qui admet un « bon » recouvrement de au plus K ouverts sont de dimension finie. On considère une variété différentielle U qui admet un « bon » recouvrement de $K + 1$ ouverts, disons $\{W_0, W_1, \dots, W_K\}$. Alors $\{W'_K := W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{K-1}, W_K\}$ est un recouvrement de U , donc par la proposition 3.13, on a une suite exacte :

$$\dots \rightarrow H_{dR}^{i-1}(W'_K \cap W_K) \xrightarrow{\partial} H_{dR}^i(U) \xrightarrow{r} H_{dR}^i(W'_K) \oplus H_{dR}^i(W_K) \xrightarrow{s} H_{dR}^i(W'_K \cap W_K) \xrightarrow{\partial} H_{dR}^i(U) \rightarrow \dots$$

Donc par l'exactitude de la suite, on a

$$\dim H_{dR}^i(U) = \dim \text{Ker } r + \dim \text{Im } r = \dim \text{Im } \partial + \dim \text{Im } r.$$

Comme $\dim \text{Im } \partial \leq \dim H_{dR}^{i-1}(W'_K \cap W_K)$ et $\dim \text{Im } r \leq \dim H_{dR}^i(W'_K) + \dim H_{dR}^i(W_K)$, donc il suffit de vérifier que $H_{dR}^*(W'_K)$, $H_{dR}^*(W_K)$ et $H_{dR}^*(W'_K \cap W_K)$ sont de dimension finie. Le $\mathbb{R}$ -espace $H_{dR}^*(W_K)$ est de dimension finie par le résultat pour $K = 1$; $H_{dR}^*(W'_K) = H_{dR}^*(W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{K-1})$ est de dimension finie par l'hypothèse de récurrence. De plus,

$$W'_K \cap W_K = (W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{K-1}) \cap W_K = \bigcup_{i=0}^{K-1} (W_i \cap W_K)$$

est une variété différentielle qui admet un « bon » recouvrement de K ouverts, donc est aussi de dimension finie par l'hypothèse de récurrence. Ainsi $H_{dR}^i(U)$ est de dimension finie. Cela termine la récurrence. $\square$

3.2.3 Troisième démonstration

Une troisième démonstration déduit la finitude de Ω du fait que le groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte est finiment engendré. On démontre ce fait avec des hypothèses très faibles comme c'est un résultat intéressant en soi.

On commence en rappelant la définition d'espace normal.

Définition 3.19. On dit qu'un espace topologique X est *normal* si pour toute couple V_1, V_2 de fermés disjoints dans X ils existent U_1, U_2 ouverts dans X à intersection vide tels que $V_1 \subseteq U_1$ et $V_2 \subseteq U_2$.

On va utiliser le fait que tout espace compact est normal et qu'un fermé d'un espace normal est aussi un espace normal.

Définition 3.20. On appelle *graphe* une couple $\Gamma := (S, A)$ formée d'un ensemble S et A une relation symétrique sur S . Si Γ est un graphe on note $|\Gamma|$ la *réalisation géométrique* c'est-à-dire l'espace topologique associé¹².

Théorème 3.21. Soit X un espace compact localement connexe par arcs et supposons qu'il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ d'ouverts simplement connexes de X , alors pour tout point $x \in X$, le groupe $\pi_1(X, x)$ est finiment engendré.

On peut supposer sans perte de généralité X connexe par arcs. L'idée de la preuve est de construire un graphe fini Γ et une fonction continue $\varphi : |\Gamma| \rightarrow X$ telle que pour un certain point $e \in \Gamma$, l'homomorphisme de groupes induit $\varphi_* : \pi_1(|\Gamma|, e) \rightarrow \pi_1(X, \varphi(e))$ soit surjectif ou simplement que l'image ayant indice fini. En utilisant le fait que $\pi_1(|\Gamma|, e)$ est finiment engendré on pourrait conclure que aussi $\pi_1(X, \varphi(e))$ est finiment engendré.

Si on prend par exemple un graphe avec un sommet pour tout ouvert de $\mathcal{U}$ et on lie deux sommets qui représentent deux ouverts à intersection non vide et on construit l'homomorphisme φ_* l'indice de l'image n'est pas évident qu'il soit fini, comme l'intersection de deux ouverts de $\mathcal{U}$ peut avoir un nombre infini de composantes connexes. Alors il faut construire un autre recouvrement fini $\mathcal{V}$ fait d'ouverts « plus petits » de $\mathcal{U}$ tel que si deux ouverts ont intersection non vide alors ils sont dans un certain ouvert de $\mathcal{U}$. Avec cela on peut construire un homomorphisme φ_* surjectif.

12. Pour une construction explicite on peut regarder [5], para. 4.8.1.

Définition 3.22. Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X , on dit qu'un ensemble d'ouverts $\mathcal{V}$ de X a la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ si pour tous $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tels que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $V_1 \cup V_2 \subseteq U$.

Lemme 3.23. Soit X un espace normal, pour tout recouvrement ouvert fini $\mathcal{U}$ il existe au moins un recouvrement ouvert fini $\mathcal{V}$ qui a $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$.

Démonstration. On démontre le lemme par récurrence sur le cardinal de $\mathcal{U}$. Si le cardinal est 1 c'est trivial.

Si $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ avec $n \geq 2$ on pose $W := \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ on prend W_1 et W_2 ouverts tels que

$$U_n^c \subseteq W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq W_2 \subseteq \overline{W_2} \subseteq W.$$

Comme $\overline{W_2}$ est fermé c'est normal. Par l'hypothèse de récurrence, si $\tilde{\mathcal{U}} = \{U_1 \cap \overline{W_2}, \dots, U_{n-1} \cap \overline{W_2}\}$, il existe un recouvrement ouvert fini de $\overline{W_2}$, appelé $\tilde{\mathcal{V}}$ qui a $\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{U}}}$. En particulier $\tilde{\mathcal{V}}$ a aussi $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$. Soit $\mathcal{V}_1$ l'ensemble obtenu par intersection de tout élément de $\tilde{\mathcal{V}}$ avec W_1 et $\mathcal{V}_2$ celui obtenu par intersection de tout élément de $\tilde{\mathcal{V}}$ avec $W_2 \cap U_n$. L'ensemble $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ est un recouvrement de W_2 et il a encore la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ parce que c'est un raffinement de $\tilde{\mathcal{V}}$. Si on ajoute l'ouvert $\overline{W_1}^c$, l'ensemble $\mathcal{V} := \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \{\overline{W_1}^c\}$ devient un recouvrement ouvert fini de X . Pour prouver la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ il manque à vérifier la condition seulement pour $\overline{W_1}^c$ avec un ouvert $V \in \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$.

Il y a deux cas : si $V \in \mathcal{V}_1$, comme par construction $V \subseteq W_1$, l'intersection avec $\overline{W_1}^c$ est vide ; si $V \in \mathcal{V}_2$ alors soit V que $\overline{W_1}^c$ sont dans U_n . $\square$

Remarque. Si X est métrisable alors le lemme est une conséquence du lemme de Lebesgue. Une surface de Riemann est métrisable, donc dans le cas auquel on est intéressé on pourrait donner une démonstration différente.

Démonstration du théorème 3.21. On suppose sans perte de généralité X connexe par arcs et par compacité que $\mathcal{U}$ soit fini. On note $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$, par le lemme 3.23 on peut prendre $\mathcal{V}'$ qui a $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$. Comme X est localement connexe par arcs les composantes connexes par arcs de tout ouvert de X sont ouvertes. Donc on peut construire à partir de $\mathcal{V}'$ un recouvrement ouvert connexe par arcs de X qui a $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ où tout ouvert n'est pas vide. Par compacité de X on peut aussi supposer que ce recouvrement soit fini, on l'indique $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$.

Soit $\Gamma := (\mathcal{V}, A)$ avec A l'ensemble des couples (V_i, V_j) telles que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. On prend pour tout $1 \leq i \leq m$ un élément $v_i \in V_i$. Si $(V_i, V_j) \in A$, on appelle U_{ij} un ouvert de $\mathcal{U}$ qui contient $V_i \cup V_j$. Soient γ_{ij} des chemins dans U_{ij} de v_i vers v_j . Soit $\varphi : |\Gamma| \rightarrow X$ qui envoie V_i vers v_i et (V_i, V_j) vers γ_{ij} . On appelle $\varphi_* : \pi_1(|\Gamma|, v_1) \rightarrow \pi_1(X, \varphi(v_1))$ l'homomorphisme induit sur les groupes fondamentaux.

Lemme 3.24. L' homomorphisme φ_* est surjectif.

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = v_1$, pour le lemme du nombre de Lebesgue ils existent $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1$ et $s_1, \dots, s_{k-1} \in \{1, \dots, m\}$ tels que pour tout $1 \leq i \leq k-1$ on ait $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_{s_i}$ et soit $s_k := s_1$.

Il suffit de montrer que $[\gamma] = [\gamma_{s_{k-1}s_k} \cdot \gamma_{s_{k-2}s_{k-1}} \cdot \dots \cdot \gamma_{s_2s_3} \cdot \gamma_{s_1s_2}]$ ¹³, comme le chemin à droite est dans l'image de φ_* . Si $2 \leq i \leq k-1$ alors $\varphi(t_i) \in V_{s_i}$, donc on peut prendre un chemin η_i à image dans V_{s_i} qui va de $\varphi(t_i)$ vers v_i . Soient η_1 et η_k les chemins triviaux d'extrémités v_1 . Pour $2 \leq i \leq k$ soient $\widetilde{\gamma_{s_{i-1}s_i}} := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$, on a clairement $[\gamma] = [\widetilde{\gamma_{s_{k-1}s_k}} \cdot \widetilde{\gamma_{s_{k-2}s_{k-1}}} \cdot \dots \cdot \widetilde{\gamma_{s_2s_3}} \cdot \widetilde{\gamma_{s_1s_2}}]$. En plus le chemin $\eta_i^{-1} \gamma_{s_{i-1}s_i} \eta_{i-1}$ est à support dans $U_{s_{i-1}s_i}$ donc c'est homotope, à extrémités fixées, à $\widetilde{\gamma_{s_{i-1}s_i}}$ parce qu'ils sont deux chemins de $U_{s_{i-1}s_i}$ avec les mêmes extrémités et $U_{s_{i-1}s_i}$ est simplement connexe. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} [\gamma] &= [\eta_k^{-1} \cdot \gamma_{s_{k-1}s_k} \cdot \eta_{k-1}^{-1} \cdot \gamma_{s_{k-2}s_{k-1}} \cdot \eta_{k-2}^{-1} \cdot \dots \cdot \eta_3^{-1} \cdot \gamma_{s_2s_3} \cdot \eta_2^{-1} \cdot \gamma_{s_1s_2} \cdot \eta_1] = \\ &= [\gamma_{s_{k-1}s_k} \cdot \gamma_{s_{k-2}s_{k-1}} \cdot \dots \cdot \gamma_{s_2s_3} \cdot \gamma_{s_1s_2}]. \end{aligned}$$

$\square$

Comme Γ est un graphe fini, $\pi_1(|\Gamma|, v_1)$ est finiment engendré, donc par la surjectivité de φ_* on prouve que $\pi_1(X, \varphi(v_1))$ est finiment engendré. $\square$

13. On dénote par $\cdot$ la juxtaposition du chemin de gauche après le chemin de droite.

En particulier le théorème 3.21 s'applique à une surface de Riemann connexe compacte. Donc on peut démontrer maintenant le théorème 3.5.

Démonstration du théorème 3.5. Soit $x \in X$, on définit $\Psi : \Omega \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X, x), \mathbb{C})$ telle que pour tout $\alpha \in \Omega$ et $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$, $\Psi(\alpha)([\gamma]) := \int_\gamma \alpha$. L'application Ψ est bien définie parce que α est localement exacte, parce que l'intégral sur γ ne dépend pas du choix du représentant dans la classe et comme si $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X, x)$, $\int_{\gamma_2 \cdot \gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{\gamma_2} \alpha$. En plus Ψ est un homomorphisme de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.

Par le théorème 3.21 le groupe $\pi_1(X, x)$ est finiment engendré, donc $\text{Hom}(\pi_1(X, x), \mathbb{C})$ est de dimension finie comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

L'homomorphisme Ψ est injectif, en fait si $\alpha \in \Omega$, $\Psi(\alpha) = 0$ implique α exacte. Si une forme holomorphe est exacte alors c'est le différentiel d'une fonction holomorphe. Comme X est compacte c'est alors le différentiel d'une fonction localement constante, donc c'est 0.

Par ces deux considérations Ω est de dimension finie.

□

4 Construction de fonctions méromorphes

Dans cette section on va utiliser le théorème de finitude pour construire les fonction méromorphes qui séparent les points. En d'autres termes, on va montrer, en construisant explicitement les fonctions méromorphes dont l'on a besoin, le théorème ci-dessous dont la démonstration est aussi l'intérêt central de ce petit exposé. Après démontrer le théorème de la séparation des points, on va montrer le théorème de la séparation des tangents.

4.1 La séparation des points

Théorème 4.1 (La séparation des points). *Soit X une surface de Riemann compacte, soient x et y deux points distincts de X . Alors il existe une fonction méromorphe f sur X définie en x et y et telle que $f(x) \neq f(y)$*

Remarque.

- a) Ce théorème implique qu'il existe suffisamment beaucoup de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte ; par contre, il n'y a pas de fonctions holomorphes non-constantes globales sur une surface de Riemann compacte (par le principe du maximum).
- b) Si X n'est pas compacte, ce théorème de séparation est encore vrai ; en effet, on a mieux, les fonctions holomorphes séparent les points.

L'idée de la démonstration est de construire une fonction méromorphe sur X (à l'aide d'une fonction plateau est du théorème de finitude) qui est holomorphe sur $X - \{x\}$ et a un pôle en x . Pour cela, une idée naturelle est de prendre une fonction de la forme

$$\chi \cdot \frac{1}{z^n}$$

sur la carte (U, z) centrée en x (qui se prolonge naturellement par 0), où U un voisinage de x et χ une fonction plateau à support compact dans U et égale à 1 près de x . Cependant, la fonction χ n'est sûrement pas une fonction holomorphe (une fonction analytique à support compact est forcément constante par le principe du maximum). La fonction

$$\chi \cdot \frac{1}{z^n}$$

n'est pas non plus une fonction dans $E^0(X)$ ainsi on peut pas appliquer d'' directement. On verra que c'est suffisant trouver une autre fonction h pour tuer

$$d''(\chi) \cdot \frac{1}{z^n}$$

ce qui bien définit une $(0, 1)$ -forme sur X . Mais comment trouver une telle fonction h ? En fait, on ne peut pas l'exprimer explicitement, mais l'existence est assurée par la finitude de l'espace H , ce qui manifeste la puissance de la théorie de la cohomologie des faisceaux. Maintenant on va préciser le raisonnement que l'on a proposé ci-dessus. Avant de présenter la démonstration, on montre d'abord un petit lemme qui fournit un critère analytique de méromorphie dont l'on a besoin dans la démonstration du théorème 4.1 :

Lemme 4.2. *Soient X une surface de Riemann (non nécessairement compacte ni connexe), D une partie fermée discrète de X et $f : X - D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $a \in X$ et (U, z, ϕ) une carte centrée en a , alors f est méromorphe en a si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U' de a contenu dans U et des constantes $C_\phi > 0$ et $k \geq 0$ tels que sur pour tout $x \in U' - a$ on ait*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|\phi(x)|^k}.$$

De plus, pour $k \geq 1$, l'ordre de f en a est k si et seulement si il existe une constante positive C'_ϕ , telle qu'en coordonnées locales on a

$$|f_\phi(z)| \sim \frac{1}{|z|^k}$$

quand z tend vers 0.

Démonstration. Si f est méromorphe en a , alors il existe des fonctions holomorphes g et h sur un voisinage V de a , telles que $f|_V = g/h$; de plus, quitte à faire une restriction, on peut supposer que V est contenu dans U , et que g est bornée sur V . On peut aussi supposer que $\phi(V) = \mathbb{D}$, quitte à faire une transformation conforme, alors $g_\phi = g \circ \phi|_V^{-1}$ et $h_\phi = h \circ \phi|_V^{-1}$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$. Donc h se met sous la forme $h_\phi(z) = z^k u_\phi(z)$ avec $u_\phi(0) \neq 0$, i.e. $u(a) \neq 0$. Comme $|u(a)| > 0$ et $|u|$ une fonction continue sur V , donc il existe un voisinage U' de a qui est contenu dans V donc dans U , tel que $|u(x)| \geq |u(a)|/2$. De plus, g est bornée sur V donc sur U' , on pose $C := 2 \sup_{x \in V} |g(x)|/|u(a)|$, alors

$$\frac{|g(x)|}{|u(x)|} \leq C$$

sur U' , donc pour tout $x \in U' - a$, on a que $\phi(x) \neq 0$ et que

$$|f(x)| = \frac{|g(x)|}{|h(x)|} = \frac{|g(x)|}{|u(x)|} \times \frac{1}{|\phi(x)|^k} \leq \frac{C}{|\phi(x)|^k}.$$

Réciproquement, si f vérifie la condition, alors $U' - a$ est contenu dans $X - D$, d'où $(\phi^k f)|_{U'}$ est une fonction holomorphe sur $U' - a$. Comme $(\phi^k f)|_{U'}$ est bornée sur $U' - a$, alors elle se prolonge naturellement en une fonction holomorphe sur U' , ainsi $\phi^k f$ est holomorphe en a . Donc f est méromorphe en a .

L'énoncé sur l'ordre de f est seulement une conséquence de la définition de l'ordre d'une fonction méromorphe en un pôle. $\square$

Démonstration du théorème 4.1.

Étape 0 : réduction au cas où X connexe. Comme X est compacte, il peut s'écrire comme une réunion disjointe des composantes connexes : $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_t$ avec $t \geq 1$. On se ramène au cas où x et y sont contenu dans la même composante connexe. Pour le cas où x et y sont dans des distinctes composantes, disons X_k et X_l , on peut construire une fonction localement constante f telle que $f \equiv 0$ sur X_k et $f \equiv 1$ ailleurs, alors f est une fonction holomorphe (donc méromorphe) qui sépare x et y . Ainsi on peut ramener au cas où X est connexe.

Étape 1 : construction des $(0, 1)$ -formes. Soit (U, ϕ, z) une carte centrée en x telle que $\phi(U) = \mathbb{D}$, soit χ une fonction plateau au-dessus de $\{x\}$ et à support dans U , c'est-à-dire, χ est une fonction de classe $\mathcal{C}_0^\infty$ sur X telle que :

- $0 \leq \chi \leq 1$;
- $\chi \equiv 1$ au voisinage de x ;
- $\text{supp}(\chi) \subset U$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose f_n la fonction sur $U - \{x\}$ définie par la formule $u \in U \mapsto 1/\phi(u)^n$, alors pour $z \in \mathbb{D}$ on a

$$f_{n,\phi}(z) := f_n \circ \phi^{-1}(z) = \frac{1}{z^n}$$

Donc $f \cdot \chi$ est bien une fonction sur $X - \{x\}$ à support dans U . Maintenant on pose

$$\alpha_n := d''(\chi) \cdot f_n.$$

Comme la fonction f_n est holomorphe (donc bien définie) dans $U - \{x\}$, la fonction χ est constante près de x , ce qui implique que $d''(\chi) \equiv 0$ au voisinage de x , donc α_n est bien définie comme une $(0, 1)$ -forme différentielle globale sur X . De plus, α_n est identiquement nulle dehors de U et près de x .

Étape 2 : construction de la fonction h en utilisant le théorème de finitude. Maintenant on dispose d'une suite de $(0, 1)$ -formes $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (χ est $\mathcal{C}^\infty$, f_n est méromorphe) dans $E^{0,1}$. On considère leurs classes $[\alpha_n]$ dans $H = \text{Coker}(d'' : E^0 \rightarrow E^{0,1})$. Par le théorème de finitude 3.5, H est un $\mathbb{C}$ -espace de dimension finie, soit g sa dimension en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors les $([\alpha_n])_{1 \leq n \leq g+1}$ sont linéairement dépendantes, c'est à dire, il existe des constantes $c_k \in \mathbb{C}$, tels que

$$\sum_{n=1}^{g+1} c_n [\alpha_n] = 0$$

dans H . Donc on peut trouver une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car les α_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur X telle que

$$\sum_{n=1}^{g+1} c_n \alpha_n = d''(h).$$

Elle, c'est exactement la fonction h que l'on cherche !

Étape 3 : construction de la fonction méromorphe ayant un seul pôle en x . Ayant trouvé la fonction h , on pose donc :

$$f = h - \sum_{n=1}^{g+1} c_n \chi \cdot f_n.$$

Comme h est $\mathcal{C}^\infty$ sur X , les $\chi \cdot f_n$ sont des fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $X - \{x\}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $X - \{x\}$. De plus, on va montrer que f est holomorphe sur $X - \{x\}$. Pour cela on peut vérifier localement, i.e. vérifier que pour tout $a \in X - \{x\}$, f est holomorphe en a . Soit (V_a, ψ_a, z) une carte centrée en a . Comme $\{U - \{x\}, X - \text{supp } \chi\}$ est un recouvrement ouvert de $X - \{x\}$, donc on peut supposer que soit $V_a \subset U - \{x\}$ soit $V_a \subset X - \text{supp } \chi$.

- Si $V_a \subset U - \{x\}$, quitte à faire une restriction et faire une transformation conforme, on peut supposer de plus que $V_a \subset U$ et que $\psi_a = \phi|_{V_a}$, alors $\psi_a(V_a)$ est un ouvert dans $\mathbb{D}$ qui ne contient pas 0. Donc sur $\psi_a(V_a)$, on a

$$\begin{aligned} f_{\psi_a}(z) &:= f|_{V_a} \circ \psi_a(z) = h|_{V_a} \circ \psi_a(z) - \sum_{n=1}^{g+1} c_n \chi|_{V_a} \circ \psi_n(z) \cdot \frac{1}{z^n} \\ &= h_{\psi_a}(z) - \sum_{n=1}^{g+1} c_n \chi_{\psi_a}(z) \cdot \frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

Comme $\psi_a(V_a) \subset \mathbb{D}$ ne contient pas 0, donc la fonction $z \mapsto 1/z^n$ est holomorphe sur $\psi_a(V_a)$, alors pour tout n , on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z^n} \right) = 0$$

sur $\psi_a(V_a)$. Donc pour tout $z \in \psi_a(V_a)$, on a

$$\frac{\partial f_{\psi_a}}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial h_{\psi_a}}{\partial \bar{z}}(z) - \sum_{n=1}^{g+1} \frac{\partial \chi_{\psi_a}}{\partial \bar{z}}(z) \cdot \frac{c_n}{z^n}.$$

Mais comme

$$d''(h) = \sum_{n=1}^{g+1} c_n \alpha_n = \sum_{n=1}^{g+1} c_n d''(\chi) \cdot f_n$$

on a en particulier,

$$(\psi_a^{-1})^*(d''h|_{V_a}) = \sum_{n=1}^{g+1} c_n (\psi_a^{-1})^*(\alpha_n|_{V_a})$$

c'est :

$$\frac{\partial h_{\psi_a}}{\partial \bar{z}}(z) = \sum_{n=1}^{g+1} \frac{\partial \chi_{\psi_a}}{\partial \bar{z}}(z) \cdot \frac{c_n}{z^n}.$$

D'où $\partial f_{\psi_a}(z)/\partial \bar{z} \equiv 0$ sur $\psi_a(V_a)$, ce qui implique que f_{ψ_a} donc f est holomorphe en a .

- Si $V_a \subset X - \text{supp } \chi$, alors $\chi \equiv 0$ sur V_a , donc on a $f = h$ sur V_a . En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \equiv 0$ sur V_a , donc $d''h|_{V_a} \equiv 0$, ce qui implique que h donc f , est holomorphe en a .

En conclusion, f est holomorphe sur $X - \{x\}$. De plus, f est méromorphe en x , c'est une conséquence du lemme 4.2 car on a pour tout $u \in U - \{x\}$

$$|f(u)| \leq \frac{C}{\phi(x)^{g+1}}$$

où

$$C := \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| \chi_\phi(z) \sum_{n=1}^{g+1} c_n z^{g+1-n} \right|.$$

Ainsi on construit une fonction méromorphe f ayant le seul pôle en x d'ordre au plus $g + 1$ ¹⁴.

14. Par l'énoncé sur l'ordre des fonctions méromorphes du lemme 4.2, on voit que f est d'ordre exactement $g + 1$ si et seulement si $c_{g+1} \neq 0$.

Étape 4 : construction de la fonction méromorphe qui sépare x et y . Soit f la fonction méromorphe construite dans l'étape 3, alors f est holomorphe sur $X - \{x\}$, en particulier, comme $y \neq x$, $|f(y)| < \infty$. Si l'on voit f comme une fonction analytique de X vers la sphère de Riemann $\Sigma = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors $f(y)$ et $f(x) = \infty \in \Sigma$ sont deux points distincts, d'où il existe une infinité de monographies qui envoient $(f(y), f(x))$ vers $(1, 0)$ ¹⁵. Faisant f composer avec une telle monographie, on a donc au moins une fonction méromorphe g avec $g(y) = 1$, $g(x) = 0$ (donc g est définie en x et y). Ainsi g est bien la fonction méromorphe qui sépare x et y . $\square$

4.2 La séparation des tangents

On peut montrer maintenant très important, qui implique que les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte, non seulement séparent les points, mais aussi séparent les tangents :

Théorème 4.3. *Soit X une surface de Riemann compacte, alors pour tout $x \in X$, il existe une fonction méromorphe f sur X telle que le revêtement ramifié $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ soit non-ramifié en x .*

Pour cela on montre d'abord un lemme

Lemme 4.4.

- 1) *Il existe un entier $n \leq 2g$ tel que pour tout point x de X , on peut trouver des fonctions méromorphes sur X ayant un seul pôle en x d'ordre n et $n + 1$ respectivement.*
- 2) *De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > N$ et pour tout point x de X , on peut trouver une fonction méromorphe admettant x comme unique pôle, d'ordre k .*

Démonstration. On garde les notation dans la démonstration du théorème 4.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, si $[\alpha_n]$ est dans le sous-espace de H engendré par les $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n-1}$, alors on a une combinaison linéaire non-triviale $\sum_{k=1}^n [\alpha_k]$ qui est nulle dans H avec $c_n \neq 0$, donc l'étape 3 de la démonstration du théorème 4.1 nous permet de construire une fonction méromorphe ayant le seul pôle en x d'ordre exactement n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on dénote par $(\star_n)$ l'énoncé :

$$[\alpha_n] \in \langle [\alpha_1], \dots, [\alpha_{n-1}] \rangle$$

Puisque H est de dimension g , le nombre des n qui ne satisfait pas $(\star_n)$ est inférieur ou égal à g . Donc il existe $n \leq 2g$ tel que on a à la fois $(\star_n)$ et $(\star_{n+1})$, ce qui montre l'énoncé 1).

Soit N le plus grand parmi les n qui ne satisfont pas $(\star_n)$, alors pour tout $k > N$, k satisfait $(\star_k)$, ce qui montre l'énoncé 2). $\square$

Remarque. En utilisant le théorème de Riemann-Roch, on peut démontrer que pour toute surface de Riemann compacte X et tout $x \in X$, il existe $N \leq 2g - 2$ qui satisfait l'énoncé 2) du lemme. De plus, pour la même raison, on a que l'énoncé 1) reste vrai si on remplace $2g$ par $2g - 1$.

Démonstration du théorème 4.3. Il suffit de construire une fonction méromorphe sur X avec un pôle simple en x . Ici on va donner une démonstration qui déroule du théorème 4.1 de la séparation des points. En effet, par le lemme 4.4, on dispose d'une fonction méromorphe h_n qui a le seul pôle en x d'ordre n , et d'une fonction méromorphe h_{n+1} ayant le seul pôle en x d'ordre $n + 1$. On prend $f = h_{n+1}/h_n$, alors f est une fonction méromorphe à un pôle simple en x . $\square$

15. Le groupe des automorphismes analytiques sur la sphère de Riemann Σ est constitué par les homographies et une homographie est uniquement déterminée par l'image de trois points.

Annexe A L'identification de H avec $H^1(X, \mathcal{O})$.

Soit X une surface de Riemann compacte connexe et soit ω une forme volume de X . Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X . Dans cet annexe on va prouver que H est isomorphe à $H^1(X, \mathcal{O})$. On commence en étendant les espaces $E_\omega^0(X)$ et $E^1(X)$ à des faisceaux de X .

Définition A.1. Soit $\tilde{\mathcal{E}}^1$ le faisceau des 1-formes mesurables α telles que $\alpha \wedge * \alpha$ ait intégral fini. Soient $\tilde{\mathcal{E}}^{1,0}$ et $\tilde{\mathcal{E}}^{0,1}$ les sous-faisceaux des formes de type $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement. Soit $\tilde{\mathcal{E}}_\omega^0$ le faisceau des fonctions à carré sommable par rapport à μ_ω telles que la dérivée au sens des distributions soit une section de $\tilde{\mathcal{E}}^1$. La dérivée extérieure induit un morphisme $d : \tilde{\mathcal{E}}_\omega^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^1$. Le morphisme d on peut le décomposer en $d = d' + d''$ tels que $d' : \tilde{\mathcal{E}}_\omega^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^{1,0}$ et $d'' : \tilde{\mathcal{E}}_\omega^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^{0,1}$.

Proposition A.2. *La suite de faisceaux*

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\iota} \tilde{\mathcal{E}}_\omega^0 \xrightarrow{d''} \tilde{\mathcal{E}}^{0,1} \rightarrow 0$$

est exacte, où ι est l'inclusion.

Démonstration. Il faut montrer pour tout $x \in X$ que

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_x \xrightarrow{\iota_x} (\tilde{\mathcal{E}}_\omega^0)_x \xrightarrow{d''_x} \tilde{\mathcal{E}}^{0,1}_x \rightarrow 0.$$

L'exactitude en $\mathcal{O}_x$ est vrai parce que ι est l'inclusion. Par l'exactitude en $(\tilde{\mathcal{E}}_\omega^0)_x$ on a que pour tout $f_x \in (\tilde{\mathcal{E}}_\omega^0)_x$, $d''_x f_x = 0$ si et seulement si il existe un couple (U, f) où U est un voisinage ouvert de x et $f \in \tilde{\mathcal{E}}_\omega^0(U)$ qui représente f_x et telle que $d''f = 0$. Par le théorème 1.14 on a que $d''f = 0$ si et seulement si f est holomorphe, donc $d''_x f_x = 0$ si et seulement si $f_x \in \iota_x(\mathcal{O}_x)$.

On montre maintenant l'exactitude en $(\tilde{\mathcal{E}}^{0,1})_x$. Soit $\bar{\alpha}_x \in (\tilde{\mathcal{E}}^{0,1})_x$ et soit (U, ϕ, z) une carte de X centrée en x telle que $\phi(U) = \mathbb{D}$. Tout germe $\bar{\alpha}_x$ est représentée par un couple (U, α) avec α une forme sur U qu'en coordonnées c'est de la forme $gd\bar{z}$ avec g définie sur $\mathbb{D}$, une fonction à carré sommable par rapport à la mesure de Lebesgue. Comme $1/\pi z$ est une solution fondamentale de d'' , si on prend T_g la distribution de $\mathbb{C}$ associée à g , comme $\mathbb{D}$ est borné, $\tilde{f} := 1/\pi z * g$ est bien défini. Si $f := \phi^{-1}\tilde{f}$, alors $d''f = \alpha$, d'où $d_x f_x = \alpha_x$. $\square$

Proposition A.3. *Soit X une surface de Riemann compacte connexe et soit ω une forme volume sur X . Les $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels $H = \text{Coker}(E_\omega^0 \xrightarrow{d''} E^{0,1})$ et $H^1(X, \mathcal{O})$ sont isomorphes.*

Démonstration. Par la proposition précédente on a la suite exacte longue en cohomologie :

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{H^0(\iota)} H^0(X, \tilde{\mathcal{E}}_\omega^0) \xrightarrow{H^0(d'')} H^0(X, \tilde{\mathcal{E}}^{0,1}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{H^1(\iota)} H^1(X, \tilde{\mathcal{E}}_\omega^0) \rightarrow \dots$$

Le faisceau $\tilde{\mathcal{E}}_\omega^0$ est fin, donc acyclique par le foncteur Γ (voir Voisin [11] paragraphe 4.3 pour la définition et pour une preuve), ainsi, en particulier, $H^1(X, \tilde{\mathcal{E}}_\omega^0) = 0$. Finalement on obtient

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} E_\omega^0 \xrightarrow{d''} E^{0,1} \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow 0.$$

$\square$

Références

- [1] Raoul Bott & Loring W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer Science+Business Media LLC, New York, 1982
- [2] Henri Cartan, *Un théorème de finitude*, Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp.n°17, 1-11
- [3] Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961
- [4] Pierre Dolbeault, *Analyse complexe*, Masson, Paris, 1990
- [5] Regine et Adrien Douady, *Algèbre et Théories galosiennes*, Cassini, Paris, 2005
- [6] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York Inc., New York, 1977
- [7] Jürgen Jost, *Compact Riemann Surfaces : An Introduction to Contemporary Mathematics* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2006
- [8] J. Guenot et R.Narasimhan, *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann* L'Enseignement Mathématique, Genève, 1976
- [9] Rick Miranda *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Soc., Providence, Rhode Island, 1995
- [10] Helmut H. Shaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1971
- [11] Claire Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I*, Cambridge studies in advanced mathematics, New York, 2002
- [12] Zhusheng Zhang, *New Lectures on Differential Topology*, Peking University Press, Beijing, 2002